FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
SPECIALIZAREA: MATEMATICĂ

LUCRARE DE LICENŢĂ

Funcţia Exponenţială şi $\mathcal{C}_0$-Semigrupuri

COORDONATOR: **Prof. dr. Preda Petre**

CANDIDAT: **Bogoşel Beniamin**

TIMIŞOARA
2010

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
SPECIALIZAREA: MATEMATICĂ

LUCRARE DE LICENŢĂ

Funcţia Exponenţială şi $\mathcal{C}_0$-Semigrupuri

COORDONATOR:
Prof. dr. Preda Petre

CANDIDAT:
Bogoşel Beniamin

TIMIŞOARA
2010

Abstract

This paper entitled *The exponential function and $\mathcal{C}_0$-semigroups* is meant to be an introduction to the theory of $\mathcal{C}_0$-semigroups. The first part is concerned with the equivalend definition and essential properties of the exponential function, which lead us to considering the exponential of a bounded operator on a Banach space and finally the definition of $\mathcal{C}_0$-semigroups. The rest of the first chapter deals with the properties of the new objects that were defined. Like the exponential function, each $\mathcal{C}_0$-semigroup has a generator which is an operator on a dense subdomain of the main Banach space, and this generator has some interesting properties. The main references for this chapter are [11] and [6].

The second chapter presents some of the results in generation theory, namely, the necessary and suficient conditions for an operator to be the generator for a $\mathcal{C}_0$-semigroup. In order to present some applications to partial differential equations, we present the connection between the abstract Cauchy problem and $\mathcal{C}_0$-semigroups. The main references for this chapter are [11],[16] and [15].

The third chapter presents the exponential stability and instability concepts, essential stability theorems and their applications to prove the Datko-Pazy theorem and Perron type theorems. An interesting case is presented when changing the input-output spaces in Perron type theorem from $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ to (L^p, L^q), namely, when $(p, q) \neq (1, \infty)$ (L^p, L^q) admissibility implies exponential stability.

Bogoşel Beniamin

Introducere

Funcţia exponenţială are un loc central în analiza matematică. Aceasta se întâlneşte peste tot, de la calculul unor limite, derivate şi integrale, până la rezolvarea de ecuaţii diferenţiale. După cum vom vedea în prima parte a acestei lucrări există multe moduri în care se poate defini funcţia exponenţială, unele dintre acestea putând fi extinse dincolo de cadrul numerelor reale, cum ar fi exponenţiala unei matrici sau a unui operator liniar şi mrginit într-un spaţiu Banach. Funcţia exponenţială este de mare ajutor în rezolvarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare atunci când spaţiul de lucru este finit dimensional. Problema apare atunci când dimensiunea spaţiului nu mai este finită, sau când operatorul căruia am vrea să îi calculăm exponenţiala nu mai este mărginit. Aici intervin semigrupurile de operatori, şi mai precis $\mathcal{C}_0$-semigrupurile. Primul capitol se ocupă cu studierea proprietăţilor elementare ale semigrupurilor, proprietăţi care vor fi folosite mai departe în capitolele următoare pentru a le studia în profunzime. Parte din ideile şi structura acestui capitol provin din cărţile *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations* de K.J. Nagel şi R. H. Nagel [6], pentru partea care prezintă definiţiile şi proprietăţile funcţiei exponenţiale, şi *Teorie Calitativă pentru Ecuaţii de Evoluţie* de P. Preda şi C. Preda [11], pentru proprietăţile de bază ale $\mathcal{C}_0$-semigrupurilor.

Al doilea capitol se ocupă cu generarea $\mathcal{C}_0$-semigrupurilor. La fel cum un operator liniar şi mărginit pe un spaţiu Banach "generează" funcţia sa exponenţială, fiecare $\mathcal{C}_0$-semigrup admite un astfel de generator infinitezimal, fapt ce a fost demonstrat în primul capitol. Acum ne punem problema inversă. Ce proprietăţi trebuie să satisfacă un operator pentru ca acesta să fie generatorul unui $\mathcal{C}_0$-semigrup, şi care dintre aceste condiţii sunt suficiente. Binecunoscuta teoremă a lui Hille şi Yosida va fi studiată în acest capitol, şi alte teoreme înrudite cu aceasta. În încheierea capitolului sunt prezentate câteva aplicaţii în studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale, şi vom vedea cum putem deduce existenţa şi unicitatea soluţiei unei ecuaţii cu derivate parţiale folosind semigrupurile şi proprietăţile acestora. Pentru partea de teorie a acestui capitol am folosit cărţile *Teorie Calitativă pentru Ecuaţii de Evoluţie* de P. Preda şi C. Preda [11], respectiv *Dynamical Systems and Evoluţion Equations* de J.A. Walker [16], iar pentru aplicaţii *Semigrupuri de operatori liniari şi aplicaţii* de Ioan I. Vrabie [15] şi [16].

Am văzut în capitolul anterior că semigrupurile pot fi utilizate în studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale. De multe ori, când avem de aface cu ecuaţii diferenţiale, sau sisteme de astfel de ecuaţii, acestea nu pot fi rezolvate explicit sau dimensiunea sistemului şi numărul mare de ecuaţii diferenţiale sau cu derivate parţiale care îl compun fac studierea proprietăţilor soluţiilor foarte dificilă. În multe cazuri, când nu se pot găsi explicit soluţiile suntem interesaţi să ştim măcar comportarea sistemului pe perioade lungi de timp, în limbaj matematic, *asimptotic*, sau lăsând timpul să meargă către infinit. Suntem interesaţi dacă soluţia sistemului este stabilă, adică nu depăşeşte anumite limite, asimptotic stabilă, adică se apropie de 0 atunci când timpul se apropie de infinit, sau instabilă, ceea ce înseamnă că există o îndepărtare faţă de 0 când timpul tinde la infinit. Capitolul al treilea se ocupă cu studierea stabilităţii $\mathcal{C}_0$-semigrupurilor folosind diferite metode de studiu. Vom prezenta câteva caracterizări elementare ale stabilităţii şi instabilităşii, cât şi unele Teoreme de stabilitate cum ar fi Teorema Datko-Pazy, Rolevicz sau Perron pentru stabilitatea şi instabilitatea $\mathcal{C}_0$-semigrupurilor. Ideile prezentate în acest capitol au fost inspirate în mare parte de *Teorie Calitativă pentru Ecuaţii de Evoluţie* de P. Preda şi C. Preda [11].

Lucrarea de faţă este doar o introducere modestă într-o ramură frumoasă a matematicii în continuă expansiune în ultimii ani. Se folosesc mult tehnici de analiză funcţională şi teoria operatorilor cum ar fi Principiul Mărginirii Uniforme, Principiul Graficului Închis cât şi noţiuni de teoria măsurii şi integrării.

În final aş dori să îi mulţumesc domnului Prof. dr Petre Preda pentru întreg sprijinul acordat în realizarea acestei lucrări de diplomă, sfaturile şi îndrumările dumnealui fiindu-mi extrem de utile în a da claritate şi consistenţă ideilor expuse.

Cuprins

Capitolul 1

Funcţia exponenţială şi $\mathcal{C}_0$-semigrupuri

1.1 Funcţia exponenţială

Considerăm ecuaţia funcţională a lui Cauchy

$$(C) \qquad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Luând $x=y=0$ obţinem $f(0)=0$, şi pentru $y=-x$ obţinem $f(-x)=-f(x)$, adică f este impară. Prin recurenţă deducem că pentru orice $x_1,...,x_n\in\mathbb{R}$ avem

$$f(x_1+...+x_n)=f(x_1)+...+f(x_n),$$

de unde putem trage concluzia că $f(nx)=nf(x),\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Din imparitate rezultă că

$$f(nx)=nf(x),\ \forall n\in\mathbb{Z},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Acum suntem pregătiţi să găsim forma lui f pe mulţimea numerelor raţionale. Fie $q=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}, m,n\in\mathbb{Z}, n\neq 0$. Atunci

$$f(q)=f\left(\frac{m}{n}\right)=mf\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}\left(nf\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{m}{n}f(1)=qf(1).$$

Notând cu $a=f(1)\in\mathbb{R}$, am obţinut că $f(q)=aq,\ \forall q\in\mathbb{Q}$. Acest rezultat nu poate fi extins la $\mathbb{R}$ fără a face alte presupuneri asupra lui f. Georg Hamel a arătat în 1905 că există o infinitate de soluţii pentru ecuaţia funcţională a lui Cauchy folosind axioma alegerii şi baze Hamel.

Mai departe, vom fi interesaţi doar de soluţiile continue ale ecuaţiei (C), deci presupunem că f este o funcţie continuă. Pentru că valorile lui f pe numere raţionale ne sunt cunoscute, vom alege $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Din densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$ ştim că există $(q_n) \subset \mathbb{Q}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x_0$. Folosind continuitatea obţinem că

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} aq_n = ax_0.$$

Pentru că x_0 a fost ales arbitrar, putem afirma că $f(x) = ax$ pentru orice x real.

Mai departe, considerăm o altă ecuaţie funcţională înrudită cu prima şi anume

$$(E) \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) \cdot f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Suntem interesaţi numai de soluţiile continue, şi neconstante. Putem observa că dacă f se anulează într-un punct, atunci f este identic nulă, ceea ce ne conduce la concluzia că $f(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Mai departe, pentru $x = y = 0$ obţinem că $f(0) = 1$, şi pentru $x = y,\ f(2x) = f(x)^2 > 0$. Prin urmare f ia doar valori pozitive.

Analog ca şi la prima ecuaţie, din (E) deducem că

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(1)^{\frac{m}{n}},\ \forall m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,$$

de unde prin trecere la limită obţinem că $f(x) = f(1)^x$. Astfel, prin alegerea convenabilă a lui $f(1)$ ecuaţia (E) are o unică soluţie continuă, neconstantă, şi suntem conduşi la următoare definiţie a funcţiei exponenţiale:

Definiţia 1.1.1. Funcţia exponenţială este unica soluţie continuă şi neconstantă a ecuaţiei (E) cu condiţia $f(1) = e$.

Pentru a justifica această definiţie fără a folosi continuitatea funcţiei exponenţiale ca şi mai sus, vom folosi o proprietate cunoscută a fincţiei exponenţiale.

Propoziţia 1.1.1. Fie $g(t) = e^{ta}$ pentru un anume $a \in \mathbb{R}$ pentru orice $t \geq 0$. Atunci funcţia g este diferenţiabilă şi satisface ecuaţia diferenţială

$$(ED)_a \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t) = ag(t), & \forall t \geq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

Reciproc, funcţia $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definită prin $g(t) = e^{ta}$ pentru un anume $a \in \mathbb{R}$ este singura funcţie derivabilă care satisface ecuaţia diferenţială $(ED)_a$.

Teorema 1.1.1. *Fie $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă care satisface (E). Atunci f este derivabilă şi există un unic $a \in \mathbb{R}$ astfel încât f verifică $(ED)_a$.*

Demonstraţie: Deoarece f este continuă pe $\mathbb{R}_+$, funcţia $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definită prin $h(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$ pentru orice $t \geq 0$ este derivabilă şi $h'(t) = f(t)$ pentru orice $t \geq 0$. Prin urmare

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{h(t)}{t} = h'(0) = f(0) = 1,$$

ceea ce implică faptul că $h(t_0)$ este diferit de zero pentru un $t_0 > 0$ suficient de mic. Atunci avem următoarele relaţii:

$$\begin{aligned} f(t) &= h(t_0)^{-1}h(t_0)f(t) = h(t_0)^{-1}\int_0^{t_0} f(t+s)\mathrm{d}s \\ &= h(t_0)^{-1}\int_t^{t+t_0} f(s)\mathrm{d}s = h(t_0)^{-1}(h(t+t_0)-h(t)) \end{aligned}$$

pentru orice $t \geq 0$. Deoarece h e derivabilă rezultă că şi f e derivabilă cu

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}f(t) = f'(0)f(t) \end{aligned}$$

Aceasta arată că f estisface $(ED)_a$ cu $a = f'(0)$. □

Teorema de mai sus ne arată că definiţia funcţiei exponenţiale cu ajutorul ecuaţiei funcţionale (E) este corectă. Deşi teorema de mai sus a fost demonstrată pe $\mathbb{R}_+$, ea se poate extide uşor la $\mathbb{R}$ ţinând cont că ecuaţia funcţională (E) implică $f(x)f(-x) = f(0) = 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}_+$.

O altă definiţie a funcţiei exponenţiale o putem da cu ajutorul seriilor.

Definiţia 1.1.2. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ seria

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!},$$

este absolut convergentă, şi astfel putem defini exponenţiala

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Într-adevăr, din criteriul raportului obţinem că

$$\frac{\frac{|x^{k+1}|}{(k+1)!}}{\frac{|x^k|}{k!}} = \frac{x}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

ceea ce ne asigură absolut convergenţa seriei, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Mai departe, vom verifica unele dintre proprietăţile clasice ale funcţiei exponenţiale. Se observă imediat că pentru $x = 0$ obţinem $e^0 = 1$, toţi ceilalţi termeni ai seriei fiind nuli.

Din Teorema lui Mertens, obţinem că

$$e^x e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = e^{x+y}.$$

După acelaşi model, se poate construi exponenţiala unui operator $A \in \mathcal{B}(X)$. Dat fiind că $\|A\| < \infty$, obţinem că seria $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ este absolut convergentă şi pentru că X este un spaţiu Banach este şi convergentă. Astfel putem defini $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$. Printre proprietăţile acestei exponenţiale avem:

i) $e^0 = I$

ii) $e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA}$

iii) $\lim_{t \to 0} e^{tA} x = x$

În continuare generalizăm conceptul de exponenţială şi introducem semigrupurile de operatori, obiectul principal de studiu al acestei lucrări.

Definiţia 1.1.3. O aplicaţie $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}(X)$ cu proprietăţile:

(i) $T(0) = I$, unde I este operatorul identitate pe X;

(ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$, pentru orice $t, s \geq 0$

se numeşte *semigrup de operatori.* Un semigrup de operatori care satisface în plus

(iii) $\lim_{t \to 0_+} \|T(t) - I\| = 0$

se numeşte *semigrup uniform continuu.*

Un exemplu de semigrup uniform continuu ar fi exponenţiala unui operator mărginit.

Exemplul 1.1.1. Fie $A \in \mathcal{B}(X)$. Atunci $T(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ este $\mathcal{C}_0$-semigrup.

Pentru a demonstra acest lucru, în primul rând trebuie să arătăm în primul rând că definiţia este corectă, adică seria considerată este convergentă în topologia spaţiului X. Pentru a demonstra acest lucru, ţinem cont că într-un spaţiu Banach, o serie este convergentă dacă şi numai dacă este absolut convergentă. Într-adevăr,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \|A^k\|}{k!} \leq \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = e^{t\|A\|} < \infty,$$

ceea ce ne arată că seria dată este absolut convergentă, şi prin urmare convergentă.

Este evident că $T(0) = e^0 = I$. Deasemenea, folosind teorema lui Mertens se obţine imediat proprietatea $T(s+t) = T(s)T(t)$, într-o manieră complet analoagă demonstraţii proprietăţilor funcţiei exponenţiale demonstrate în începutul acestui capitol.

Proprietatea a treia se verifică prin calcul direct.

$$\|T(t) - I\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = e^{t\|A\|} - 1,$$

care are limita 0 pentru $t \to 0_+$. Din criteriul comparaţiei rezultă afirmaţia cerută.

O altă clasă de semigrupuri de operatori este dată de

Definiţia 1.1.4. O aplicaţie $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}(X)$ care verifică proprietăţile

(i) $T(0) = I$;

(ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$, pentru orice $s, t \geq 0$;

(iii) $\lim\limits_{t \to 0_+} T(t)x = x$, pentru orice $x \in X$

se numeşte *semigrup de clasă* $\mathcal{C}_0$ sau *tare continuu.*

Exemplul 1.1.2. Fie $X = \ell^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{R}) = \left\{ (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$ cu norma $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Definim $T(t) : X \to X$ prin $T(t)x = (e^{-nt}x_n)$. Atunci $\{T_t\}_{t \geq 0}$ este un $\mathcal{C}_0$-semigrup.

Pentru a demonstra acest lucru procedăm în felul următor.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |e^{-nt}x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt}|x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1,$$

ceea ce implică $\|T(t)x\|_1 \leq \|x\|_1$ pentru orice $x \in \ell^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$. Astfel putem vedea că operatorii $T(t)$ sunt corect definiţi.

Este evident că $T(0) = I$ şi $T(t+s)x = \left(e^{-n(t+s)}x_n\right) = (e^{-nt}e^{-ns}x_n) = T(t)T(s)x$.

Pentru cea de-a treia proprietate de verificat, calculăm

$$\|T(t)x - x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-nt})|x_n|.$$

Pentru că $(1 - e^{-nt})|x_n| \leq |x_n|$ pentru orice $t \geq 0$, pentru $x \in \ell^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$, din criteriul lui Weierstrass rezultă că $\left(\sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-nt})|x_n| \right)$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}_+$. Astfel putem interschimba limita cu suma seriei în modul următor

$$\lim_{t \to 0_+} \|T(t)x - x\|_1 = \lim_{t \to 0_+} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-nt})|x_n| = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{t \to 0_+} (1 - e^{-nt})|x_n| = 0,$$

ceea ce implică faptul că $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este un $\mathcal{C}_0$-semigrup.

În continuare vom deduce câteva proprietăţi importante ale unui $\mathcal{C}_0$ semigrup.

Propoziţia 1.1.2. *Fie $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$ semigrup. Atunci există $\delta > 0$ şi există $M \geq 1$ astfel încât $\|T(t)\| \leq M$, oricare ar fi $t \in [0, \delta]$.*

Demonstraţie: Presupunem contrariul, şi anume că oricare ar fi $\delta > 0$, şi oricare ar fi $M \geq 1$, există $t \in [0, \delta]$ cu proprietatea cš $\|T(t)\| > M$.

Astfel, pentru $\delta = \frac{1}{n}$, $M = n$ există $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ astfel încât $\|T(t_n)\| > n$. Deci există un şir (t_n), cu $t_n > 0$, $t_n \to 0_+$ cu proprietatea că $\|T(t_n)\| > n$. Dar $T(t)x \to x$ pentru $t \to 0_+$, oricare ar fi $x \in X$. Astfel avem şi $T(t_n)x \to x$ pentru $n \to \infty$, şi astfel, oricare ar fi $x \in X$ există $M_x > 0$ cu proprietatea că $\|T(t_n)x\| \leq M_x$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Din Principiul Mărginirii Uniforme rezultă că există $M > 0$ (finit) astfel încât $\|T(t_n)x\| \leq M\|x\|$, oricare ar fi $x \in X$ şi oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Astfel $\|T(t_n)\| \leq M$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Din cele de mai sus am obţinut că $n < \|T(t_n)\| \leq M$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, de unde, pentru $n \to \infty$ obţinem contradicţia $M = \infty$. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă şi propoziţia este demonstrată.

Inegalitatea $M \geq 1$ este necesară, deoarece $1 = \|T(0)\| \leq M$. □

Teorema 1.1.2. (Teorema de creştere exponenţială) *Fie $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semigrup. Atunci există $M \geq 1$ şi există $\omega \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $\|T(t)\| < Me^{\omega t}$, oricare ar fi $t \geq 0$.*

Demonstraţie: Fie $t \geq 0$ şi $n = \left\lfloor \dfrac{t}{\delta} \right\rfloor$, partea întreagă a lui $\dfrac{t}{\delta}$, cu δ din Propoziţia 1.1.2. Atunci $n \leq \frac{n}{\delta} < n+1$ şi astfel $n\delta \leq t < (n+1)\delta$, de unde obţinem că

$$\|T(t)\| = \|T(t - n\delta + n\delta)\| = \|T(t - n\delta)T(n\delta)\| \leq \|T(t - n\delta)\|\|T(\delta)^n\| \leq M\|T(\delta)\|^n,$$

unde M este cel din Propoziţia 1.1.2. Deoarece $\|T(\delta)\| \leq M$, deducem că $\|T(t)| \leq M{\cdot}M^n$.

Notăm $M = e^{\omega t}$ şi obţinem $\omega = \dfrac{1}{\delta}\ln M \geq 0$. Atunci $\|T(t)\| \leq Me^{\omega n\delta} \leq Me^{\omega t}$, oricare ar fi $t \geq 0$. Astfel există $M \geq 1$ şi există $\omega = \dfrac{1}{\delta}\ln M \geq 0$ astfel încât $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, pentru orice $t \geq 0$. □

Remarca 1.1.1. Această teoremă va fi folosită deseori în proprietăţi de mărginire. Aşa cum putem vedea şi din demonstraţia teoremei, ω poate fi considerat pozitiv, lucru pe care îl vom presupune şi noi pentru a evita unele discutii în legătură cu maximul funcţiei $t \mapsto Me^{\omega t}$ pe un interval de lungime finită.

Conform teoremei precedente, putem da următoarea definiţie.

Definiţia 1.1.5. Fie $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semigrup. Numărul

$$\omega_0(T) = \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \exists M > 0 \text{ astfel încât } \|T(t)\| \leq Me^{\omega t},\ \forall t \geq 0\}$$

se numeşte *indicele de creştere exponenţială al $\mathcal{C}_0$-semigrupului $\{T_t\}_{t\geq 0}$*.

Propoziţia 1.1.3. *Dacă* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *este un* $\mathcal{C}_0$*-semigrup, atunci există*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\|T(t)\|}{t}=\inf_{t>0}\frac{ln\|T(t)\|}{t}.$$

Demonstraţie: Notăm $\alpha=\inf\limits_{t>0}\dfrac{\ln\|T(t)\|}{t}\in\overline{\mathbb{R}}$. Considerăm două cazuri.

Cazul 1. Presupunem $\alpha\in\mathbb{R}$. Atunci, din definiţia infimumului rezultă că

$$\text{a) } \alpha\leq\frac{\ln\|T(t)\|}{t},\ \forall t>0;$$

$$\text{b) } \forall\varepsilon>0,\ \exists t_0>0:\frac{\ln\|T(t_0)\|}{t_0}<\alpha+\varepsilon.$$

Din a) obţinem că $e^{\alpha t}\leq\|T(t)\|$, pentru orice $t>0$ şi din b) obţinem că pentru orice $\varepsilon>0$ există $t_0>0$ astfel încât $\|T(t_0)\|<e^{(\alpha+\varepsilon)t_0}$.

Fie $t\geq 0$ şi notăm cu $n=\left\lfloor\dfrac{t}{t_0}\right\rfloor$, de unde rezultă că $n\leq\dfrac{t}{t_0}<n+1$, adică $nt_0\leq t<(n+1)t_0$. Atunci, folosind proprietăţile semigrupurilor, avem următoarele relaţii:

$$T(t)=T(t-nt_0+nt_0)=T(t-nt_0)T(nt_0)=T(t-nt_0)T(t_0)^n.$$

Trecând la normă obţinem

$$\|T(t)\|\leq\|T(t-nt_0)\|\|T(t_0)^n\|\leq\|T(t-nt_0)\|\|T(t_0)\|^n.$$

Logaritmând această relaţie avem

$$\ln\|T(t)\|\leq\ln\|T(t-nt_0)\|+n\ln\|T(t_0)\|\leq\ln Me^{\omega}t_0+n\ln\|T(t_0)\|=$$

$=\ln M+\omega t_0+n\ln\|T(t_0)\|$, de unde rezultă că

$$\frac{\ln\|T(t)\|}{t}\leq\frac{\ln M}{t}+\frac{\omega t_0}{t}+\frac{n}{t}\ln\|T(t_0)\|=\frac{\ln M}{t}+\frac{\omega t_0}{t}+\frac{\lfloor\frac{t}{t_0}\rfloor}{\frac{t}{t_0}}(\alpha+\varepsilon)\xrightarrow[t\to\infty]{}\alpha+\varepsilon.$$

Prin urmare

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln\|T(t)\|}{t}\leq\alpha+\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0.$$

Pentru $\varepsilon\to 0$ obţinem $\limsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{\ln\|T(t)\|}{t}\leq\alpha$. Din relaţia a) rezultă deasemenea că $\liminf\limits_{t\to\infty}\dfrac{\ln\|T(t)\|}{t}\geq\alpha$. Astfel avem

$$\alpha\leq\liminf_{t\to\infty}\frac{\ln\|T(t)\|}{t}\leq\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln\|T(t)\|}{t}\leq\alpha,$$

de unde rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\|T(t)\|}{t} = \alpha = \inf\limits_{t>0} \dfrac{\ln\|T(t)\|}{t}$.

Cazul 2. Presupunem că $\alpha = -\infty$. Atunci pentru orice $y \in \mathbb{R}$ există t_0 astfel încât $\dfrac{\ln\|T(t)\|}{t} < y$. Analog ca şi la cazul precedent obţinem relaţia

$$\frac{\ln\|T(t)\|}{t} \leq \frac{\ln M}{t} + \frac{\omega t_0}{t} + \frac{n}{t}\ln\|T(t_0)\| = \frac{\ln M}{t} + \frac{\omega t_0}{t} + \frac{\lfloor \frac{t}{t_0} \rfloor}{\frac{t}{t_0}} y \xrightarrow[t\to\infty]{} y.$$

Deoarece y a fost ales arbitrar, rezultă că $\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{\ln\|T(t)\|}{t} = -\infty$, adică $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\|T(t)\|}{t} = -\infty = \inf\limits_{t>0} \dfrac{\ln\|T(t)\|}{t}$. □

Remarca 1.1.2. În demonstraţia de mai sus am folosit faptul că $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{\lfloor s \rfloor}{s} = 1$. Acest lucru se demonstrează folosind următoarele inegalităţi elementare din definiţia părţii întregi

$$s - 1 < \lfloor s \rfloor \leq s,$$

de unde deducem că

$$\frac{s-1}{s} < \frac{\lfloor s \rfloor}{s} \leq \frac{s}{s}.$$

Din criteriul cleştelui rezultă că limita căutată este într-adevăr egală cu 1.

Teorema 1.1.3. *Dacă $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este un $\mathcal{C}_0$-semigrup, atunci*

$$\omega_0(T) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln\|T(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{\ln\|T(t)\|}{t}.$$

Demonstraţie: Fie $\omega > \omega_0(T)$. Atunci există $M_\omega > 0$ astfel încât $\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}$, oricare ar fi $t \geq 0$. De aici rezultă că $\dfrac{\ln\|T(t)\|}{t} \leq \dfrac{\ln M_\omega}{t} + \omega$. Trecând la limită pentru $t \to \infty$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\|T(t)\|}{t} \leq \omega$, şi asta pentru orice $\omega > \omega_0(T)$. Trecând la infimum după ω, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\|T(t)\|}{t} \leq \omega_0(T)$.

Fie $\alpha > \inf\limits_{t>0} \dfrac{\ln\|T(t)\|}{t}$. Atunci există $t_0 > 0$ astfel încât $\dfrac{\ln\|T(t_0)\|}{t_0} < \alpha$. Pentru $t \geq 0$ considerăm din nou $n = \left\lfloor \dfrac{t}{t_0} \right\rfloor$, ceea ce este echivalent cu $nt_0 \leq t < (n+1)t_0$. Atunci avem

$$\|T(t)\| = \|T(t - nt_0)T(nt_0)\| \leq \|T(t - nt_0)\|\|T(t_0)\|^n \leq \|T(t - nt_0)\|e^{\alpha n t_0} =$$

$$= \|T(t - nt_0)\|e^{-\alpha(t - nt_0)}e^{\alpha t}. \ \forall t \geq 0 \quad (\star)$$

Mai departe, considerăm funcţia $\phi : [0, t_0] \to \mathbb{R}_+$, $\phi(s) = \|T(s)\|e^{-\alpha s}$. Din Teorema de Creştere exponenţială ştim că există $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$ astfel încât $\phi(s) \leq Me^{\omega s}e^{-\alpha s}$.

Membrul drept al inegalităţii precedente este o funcţie continuă pe $[0, t_0]$ şi astfel mărginită superior pe acest interval. Prin urmare există $M_\alpha = \sup\limits_{s\in[0,t_0]} \|T(s)\|e^{-\alpha s}$. Din această relaţie şi din $(\star)$ obţinem că

$$\|T(t)\| \leq M_\alpha e^{\alpha t},\ \forall t \geq 0.$$

De aici deducem că $\omega_0(T) \leq \alpha,\ \forall \alpha > \inf\limits_{t>0} \dfrac{\ln \|T(t)\|}{t}$. Trecând la infimum după α în relaţia precedentă avem $\omega_0(T) \leq \inf_{t>0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t}$. Sintetizând rezultatele obţinem

$$\omega_0(T) \leq \inf_{t>0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} \leq \omega_0(T),$$

ceea ce demonstrează egalitatea cerută. □

Propoziţia 1.1.4. *Fie* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{C}_0$*-semigrup şi* $x \in X$*. Atunci funcţia* $t \mapsto T(t)x : \mathbb{R}_+ \to X$ *este continuă pe* $\mathbb{R}_+$*.*

Demonstraţie: Continuitatea la dreapta în $t \geq 0$ rezultă din

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| \leq \|T(t)\|\|T(h)x - x\| \xrightarrow[h\to 0_+]{} 0.$$

Continuitatea la stânga în $t > 0$ rezultă din

$$\begin{aligned} &\|T(t-h)x - T(t)x\| = \|T(t-h)x - T(t-h)T(h)x\| \leq \\ &\leq \|T(t-h)\|\|T(h)x - x\| \leq Me^{\omega(t-h)}\|T(h)x - x\| \xrightarrow[h\to 0_+]{} 0, \end{aligned}$$

unde M şi ω sunt din Teorema de Creştere Exponenţială. □

1.2 Generatorul Infinitezimal

Definiţia 1.2.1. Fie $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semigrup. Notăm

$$D(A) = \left\{ x \in X : \exists \lim_{h\to 0_+} \frac{T(h)x - x}{h} \right\}$$

şi definim

$$A : D(A) \to X,\ Ax = \lim_{h\to 0_+} \frac{T(h)x - x}{h}.$$

Operatorul A se numeşte **generatorul infinitezimal al $\mathcal{C}_0$-semigrupului** $\{T_t\}_{t\geq 0}$.

Exemplul 1.2.1. Fie semigrupul uniform continuu $\{T_t\}_{t\geq 0},\ T(t) = e^{tA}$, unde $A \in \mathcal{B}(X)$. Atunci A este generatorul infinitezimal al semigrupului $\{T_t\}_{t\geq 0}$.

Demonstraţie: Calculăm

$$\left\|\frac{T(h)-I}{h}-A\right\| = \left\|\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^kA^k}{k!}-A\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{k-1}A^k}{k!}-A\right\| = \left\|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{k-1}A^k}{k!}\right\| \leq$$
$$\leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{k-1}\|A\|^k}{k!} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{h^i\|A\|^{i+1}}{(i+1)!} \leq \|A\|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{h^i\|A\|^i}{i!} = \|A\|(e^{h\|A\|}-1),$$

şi observăm că acest ultim termen tinde la 0 când $h \to 0_+$. Prin urmare $\frac{T(h)-I}{h}$ converge la A în norma din $\mathcal{B}(X)$. Deoarece convergenţa în normă implică convergenţa punctuală, rezultă că $\lim\limits_{h\to 0_+}\frac{T(h)x-x}{h} = Ax$, oricare ar fi $x \in X$.

Prin urmare, generatorul infinitezimal al semigrupului uniform continuu $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ este A.

Să privim în continuare la anumite proprietăţi ale generatorului infinitezimal.

Propoziţia 1.2.1. *Dacă $x \in D(A)$, atunci:*

i) $T(t)x \in D(A)$, pentru orice $t \geq 0$ şi $AT(t)x = T(t)Ax$;

ii) Aplicaţia $T(\cdot)x : \mathbb{R}_+ \to X$ este derivabilă şi $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$;

iii) $T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax\mathrm{d}\tau$.

Demonstraţie: i) Observăm că $\frac{T(h)T(t)x-T(t)x}{h} = T(t)\frac{T(h)x-x}{h} \to T(t)Ax$, pentru $h \to 0_+$. De aici deducem că $T(t)x \in D(A)$ şi $AT(t)x = T(t)Ax$.

ii) Fie $h > 0$ şi $x \in D(A)$. Atunci $\frac{T(t+h)x-T(t)x}{h} = T(t)\frac{T(h)x-x}{h} \to T(t)Ax$, pentru $h \to 0_+$ şi astfel derivata la dreapta în $T(t)x$ există şi este egală cu $\frac{\mathrm{d}^+T(t)x}{\mathrm{d}t^+}$ există şi este egală cu $T(t)Ax$.

Pentru calculul derivatei la stânga avem

$$\left\|\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h}-T(t)Ax\right\| = \left\|\frac{T(t-h+h)x-T(t-h)x}{h}-T(t)Ax\right\| =$$
$$= \left\|T(t-h)\frac{T(h)x-x}{h}-T(t-h)T(h)Ax\right\| \leq \|T(t-h)\|\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-T(h)Ax\right\| \leq$$
$$\leq Me^{\omega(t-h)}\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-T(h)Ax\right\| \leq Me^{\omega(t-h)}\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right\| +$$
$$+Me^{\omega(t-h)}\|T(h)Ax-Ax\| \to 0,$$

atunci când $h \to 0_+$, şi astfel derivata la stânga există şi este egală cu $\dfrac{\mathrm{d}^- T(t)x}{\mathrm{d}t^-} = AT(t)x = T(t)Ax$.

iii) Fie $x \in D(A)$. Atunci $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x$. Integrând de la s la t obţinem

$$\int_s^t T(\tau)Ax\mathrm{d}\tau = \int_s^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}T(\tau)x\mathrm{d}\tau = T(t)x - T(s)x.$$

Propoziţia 1.2.2. *Pentru orice $x \in X$ şi pentru orice $t \geq 0$ avem $\int_0^t T(\tau)x\mathrm{d}\tau \in D(A)$ şi $A\int_0^t T(\tau)x\mathrm{d}\tau = T(t)x - x$.*

Demonstraţie: Avem

$$\frac{T(h)\int_0^t T(\tau)x\mathrm{d}\tau - \int_0^t T(\tau)x\mathrm{d}\tau}{h} = \frac{1}{h}\int_0^t T(h+\tau)x\mathrm{d}\tau - \frac{1}{h}\int_0^t T(\tau)\mathrm{d}\tau =$$

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\mathrm{d}s.$$

Ultimul termen, pentru $h \to 0_+$ tinde la $T(t)x - x$, ceea ce ne arată că $\int_0^t T(\tau)s\mathrm{d}\tau \in D(A)$ şi

$$A\left(\int_0^t T(\tau)x\mathrm{d}\tau\right) = T(t)x - x.$$

□

Propoziţia 1.2.3. *Dacă $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este un $\mathcal{C}_0$-semigrup, atunci $\overline{D(A)} = X$.*

Demonstraţie: Fie $x \in X$. Atunci $\int_0^{\frac{1}{n}} T(\tau)\mathrm{d}\tau \in D(A)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. De aici rezultă că $n\int_0^{\frac{1}{n}} T(\tau)x\mathrm{d}\tau \in D(A)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Dar ştim că $\dfrac{1}{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}} T(\tau)x\mathrm{d}\tau \to x$, ceea ce implică faptul că $X \subset \overline{D(A)}$. Cum incluziunea reciprocă este evidentă din definiţia lui $D(A)$, rezultă că $\overline{D(A)} = X$. □

Teorema 1.2.1. (Teorema de unicitate a generării) *Fie $\{T_t\}_{t\geq 0}$ şi $\{S_t\}_{t\geq 0}$ două $\mathcal{C}_0$-semigrupuri, care au acelaşi generator A. Atunci rezultă că $T(t) = S(t)$, pentru orice $t \geq 0$.*

Demonstraţie: Fie $x \in D(A)$ şi $t > 0$. Definim $u : [0,t] \to X,\ u(s) = T(t-s)S(s)x$. Atunci $\dot{u}(s) = -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)AS(s)x = 0$, pentru orice $s \in [0,t]$, de unde rezultă că u este constantă pe $[0,t]$, şi astfel $u(0) = u(t)$, ceea ce este echivalent cu $T(t)x = S(t)x$, pentru orice $x \in D(A)$. Cum $\overline{D(A)} = X$, rezultă că $T(t) = S(t),\ \forall t \geq 0$.
□

Teorema 1.2.2. *Dacă $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este $\mathcal{C}_0$-semigrup şi A este generatorul său infinitezimal, atunci A este închis.*

Demonstraţie: Vom folosi Principiul Graficului Închis. Fie $x_n \to x,\ x_n \in D(A)$ şi $Ax_n \to y$. Vom demonstra că $x \in D(A)$ şi $Ax = y$. Din $x_n \in D(A),\ x_n \to x$ rezultă

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(\tau)Ax_n \mathrm{d}\tau \xrightarrow[n\to\infty]{} T(t)x - x.$$

Mai departe avem

$$\|T(\tau)Ax_n - T(\tau)y\| \leq \|T(\tau)\|\|Ax_n - y\| \leq Me^{\omega\tau}\|Ax_n - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

de unde rezultă că $T(\cdot)Ax_n$ converge uniform pe $[0,t]$ la $T(\cdot)y$, astfel, interschimbând limita cu integrala avem

$$\int_0^t T(\tau)Ax_n \mathrm{d}\tau \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^t T(\tau)y\mathrm{d}\tau.$$

Astfel $T(t)x - x = \displaystyle\int_0^t T(\tau)y\mathrm{d}\tau$ şi

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(\tau)y\mathrm{d}\tau \xrightarrow[t\to 0_+]{} y.$$

Deci $x \in D(A)$ şi $Ax = y$. □

Exemplul 1.2.2. (Semigrupul de translaţii) Fie

$$X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ uniform continuă şi mărginită pe } \mathbb{R}_+\},$$

cu $|||f||| = \sup\limits_{t\geq 0}|f(t)|$ şi $T(t) : X \to X,\ (T(t)f)(s) = f(t+s)$. Atunci $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este un $\mathcal{C}_0$-semigrup, cu generatorul infinitezimal $A : D(A) \to X$ cu $D(A) = \{f \in X : f \text{ derivabilă pe } \mathbb{R}_+, f' \in X\}$ şi $Af = f'$.

Demonstraţie: Se observă evident că $T(0) = I$ şi $T(s+t) = T(s)T(t)$. Pentru proprietatea de $\mathcal{C}_0$-semigrupprocedăm în felul următor. Calculăm

$$|||T(t)f - f||| = \sup_{s\geq 0}|T(t)f(s) - f(s)| = \sup_{s\geq 0}|f(s+t) - f(s)|.$$

Pentru că f este uniform continuă pe $\mathbb{R}_+$, ştim că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $u, v \geq 0$ astfel încât $|u - v| < \delta$ avem $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$.

Prin urmare, pentru $t < \delta$ avem $|f(s+t) - f(s)| < \varepsilon,\ \forall s \geq 0$. Trecând la supremum, şi folosind calculele de mai sus obţinem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$|||T(t)f - f||| = \sup_{s\geq 0}|f(s+t) - f(s)| \leq \varepsilon,$$

pentru orice $t < \delta$. Prin urmare $\lim\limits_{t \to 0_+} T(t)f = f$ pentru orice $f \in X$.

Arătăm în continuare că

$$D(A) = \{f \in X : f \text{ derivabilă pe } \mathbb{R}_+,\ f' \in X\} \text{ şi } Af = f'.$$

Fie $f \in D(A)$. Atunci $\left|\left|\left|\dfrac{T(h)f - f}{h} - Af\right|\right|\right| \to 0_+$, ceea ce este echivalent cu faptul că $\sup\limits_{t \geq 0} \left|\dfrac{T(h)f(t) - f(t)}{h} - Af(t)\right| \to 0_+$, de unde obţinem că

$$\sup_{t \geq 0} \left|\frac{f(t+h) - f(t)}{h} - Af(t)\right| \to 0_+.$$

Astfel, oricare ar fi $t \geq 0$ avem

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = Af(t),$$

de unde rezultă că f e derivabilă la dreapta şi $\dfrac{\mathrm{d}^+ f(t)}{\mathrm{d}t^+} = Af(t)$, oricare ar fi $t \geq 0$. Notăm, pentru simplificarea calculelor ce urmeazu a $Af = g \in X$. Vrem acum să demonstrăm existenţa derivatei la stângă, şi pentru aceasta considerăm $t > h > 0$ şi notăm $t - h = s$. Atunci

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(t-h) - f(t)}{-h} - g(s+h)\right| = \left|\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - g(s+h)\right| = \\
&= \left|\frac{f(s+h) - f(s)}{h} - g(s+h)\right| = \left|\frac{T(h)f(s) - f(s)}{h} - g(s) + g(s) - g(s+h)\right| \leq \\
&\leq \left|\frac{T(h)f(s) - f(s)}{h} - g(s)\right| + |g(s+h) - g(s)| = \\
&= \left|\frac{T(h)f(s) - f(s)}{h} - g(s)\right| + |T(h)g(s) - g(s)| \leq \\
&\leq \left|\left|\left|\frac{T(h)f - f}{h} - g\right|\right|\right| + |||T(h)g - g||| \xrightarrow[h \to 0_+]{} 0.
\end{aligned}$$

Prin urmare f admite derivata la stânga egală cu Af, ceea ce demonstrează faptul că f este derivabilă pe $\mathbb{R}_+$ şi $Af = f'$. Astfel am demonstrat că

$$D(A) \subset \{f \in X : f \text{ derivabilă pe } \mathbb{R}_+,\ f' \in X\} \text{ şi } Af = f'.$$

Pentru demonstrarea incluziunii inverse calculăm

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\left|\frac{T(h)f - f}{h} - f'\right|\right|\right| = \sup_{t \geq 0} \left|\frac{f(t+h) - f(t)}{h} - f'(t)\right| = \\
&= \sup_{t \geq 0} |f'(c) - f'(t)|,
\end{aligned}$$

unde $c \in (t, t+h)$ din Teorema lui Lagrange. Deoarece $f' \in X$ rezultă ca f' este uniform continuă pe $\mathbb{R}_+$, şi acest fapt demonstrează că $\lim\limits_{h \to 0_+} \sup\limits_{t \geq 0} |f'(c) - f'(t)| = 0$ pentru că $|c - t| < h$. Din criteriul comparaţiei rezultă că $Af = f'$. Prin urmare $f \in D(A)$, fapt ce demonstrează şi incluziunea inversă.

Se poate constata uşor că generatorul infinitezimal al semigrupului de translaţii este nemărginit dacă considerăm

$$\begin{cases} f_n(t) = (1-t)^n, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}.$$

Atunci $f_n \in D(A)$ şi $|||Af_n||| = n$, pentru orice $n \geq 2$.

Teorema 1.2.3. (Teorema de caracterizare a semigrupurilor uniform continue) *Fie $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semigrup. Atunci $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este uniform continuu dacă şi numai dacă generatorul său infinitezimal $A \in \mathcal{B}(X)$.*

Demonstraţie: Suficienţa: Considerăm $S(t) = e^{tA}$, care este un $\mathcal{C}_0$-semigrup cu generatorul infinitezimal A. Dacă A este şi generatorul infinitelui T, atunci, din teorema de generare $T(t) = S(t) = e^{tA}$ pentru orice $t \geq 0$. Prin urmare $\{T_t\}_{t\ geq 0}$ este semigrup uniform continuu.

Necesitatea: Dacă $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este semigrup uniform continuu, atunci $\lim\limits_{t\to 0} \|T(t) - I\| = 0$. Atunci avem

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau)\mathrm{d}\tau - I \right\| = \frac{1}{t} \left\| \int_0^t (T(\tau) - I)\mathrm{d}\tau \right\| \leq \frac{1}{t} \int_0^t \|T(t) - I\|\mathrm{d}\tau.$$

Fie $0 < \varepsilon < 1$ pentru care există $\delta > 0$ astfel încât $\|T(t) - I\| < \varepsilon$, $\forall t \in [0, \delta]$. Atunci, din inegalitatea demonstrată mai sus avem

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau)\mathrm{d}\tau \right\| < \varepsilon < 1,\ \forall t \in [0, \delta].$$

Alegem $\rho \in [0, \delta]$. Conform Teoremei Lui Riesz există $\left(\frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(\tau)\mathrm{d}\tau \right)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$, ceea ce implică existenţa lui $\left(\int_0^\rho T(\tau)\mathrm{d}\tau \right)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$. Pentru $h > 0$ avem

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^\rho T(\tau)\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{h} \int_0^\rho T(\tau + h)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{h} \int_0^\rho T(\tau)\mathrm{d}\tau = \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{\rho+h} T(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{h} \int_0^\rho T(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{h} \int_\rho^{\rho+h} T(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Folosind inversabilitatea lui $\int_0^\rho T(\tau)\mathrm{d}\tau$ obţinem

$$\frac{T(h)-I}{h} = \left(\frac{1}{h}\int_\rho^{\rho+h} T(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{h}\int_0^h T(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_0^\rho T(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{-1} \xrightarrow[h\to 0_+]{}$$
$$\xrightarrow[h\to 0_+]{} (T(\rho)-I)\left(\int_0^\rho T(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{-1} \in \mathcal{B}(X).$$

Prin urmare $A \in \mathcal{B}(X)$. □

Definiţia 1.2.2. Fie X un spaţiu Banach peste $\mathbb{C}$. Pentru un operator $A : D(A) \subset X \to X$ se defineşte mulţimea sa rezolventă ca fiind $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists(\lambda I - A)^{-1}\}$, şi se defineşte rezolventa lui A ca fiind $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

Se numeşte spectrul lui A mulţimea $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Teorema 1.2.4. (Transformata Laplace a $\mathcal{C}_0$-semigrupului $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *Dacă* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *este un* $\mathcal{C}_0$*-semigrup şi* $\lambda \in \mathbb{C}$ *cu proprietatea* $\mathrm{Re}\lambda > \omega_0(\mathrm{T})$, *atunci*

$$\lambda \in \rho(A) \text{ şi } R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\mathrm{d}t.$$

Demonstraţie: Fie $x \in X, \lambda \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că $\mathrm{Re}\lambda > \omega_0(\mathrm{T})$ şi $R_\lambda x := \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\mathrm{d}t$. Atunci $\int_0^\infty \|e^{-\lambda t}T(t)x\|\mathrm{d}t = \int_0^\infty |e^{-\lambda t}|\|T(t)x\|\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\lambda\ t}\|T(t)x\|\mathrm{d}t$. Fie acum ω astfel încât $\omega_0(T) < \omega < \mathrm{Re}\lambda$. Atunci există $M > 0$ astfel încât $\|T(t)\| \leq Me^{-\omega t}$, oricare ar fi $t \geq 0$. Astfel

$$\int_0^\infty \|e^{-\lambda t}T(t)x\|\mathrm{d}t \leq \int_0^\infty Me^{-\mathrm{Re}\lambda t}e^{\omega t}\|x\|\mathrm{d}t = \frac{M\|x\|}{\mathrm{Re}\lambda - \omega} < \infty.$$

Prin urmare $\|R_\lambda x\| \leq \frac{M}{\mathrm{Re}\lambda - \omega}\|x\|$, oricare ar fi $x \in X$. Mai departe avem

$$\begin{aligned}\frac{T(h)R_\lambda x - R_\lambda x}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(h+t)x\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}T(s)x\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\mathrm{d}s = \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\mathrm{d}s = \\ &= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}R_\lambda x - e^{\lambda h}\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}T(s)x\mathrm{d}s \xrightarrow[h\to 0_+]{} \lambda R_\lambda x - x.\end{aligned}$$

Astfel rezultă că $R_\lambda x \in D(A), AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x$ şi astfel $\lambda R_\lambda x - AR_\lambda x = x$, oricare ar fi $x \in X$.

Fie acum $x \in D(A)$. Atunci

$$R_\lambda Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Ax\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x\mathrm{d}t =$$
$$= e^{-\lambda t}T(t)x\Big|_0^\infty + \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t = -x + \lambda R_\lambda x.$$

Astfel rezultă că $x = R_\lambda(\lambda I - A)$ pentru orice $x \in D(A)$, ceea ce arată că $\lambda \in \rho(A)$ şi

$$R(\lambda; A)x = (\lambda I - A)^{-1}x = R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\mathrm{d}t.$$

□

Propoziţia 1.2.4. *Dacă $A \in \mathcal{B}(X)$, $\sigma(A)$ este spectrul lui A şi Γ este o curbă închisă, rectificabilă Jordan, ce conţine $\sigma(A)$, atunci*

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}R(\lambda; A)\mathrm{d}\lambda.$$

Demonstraţie: Vom folosi teorema Cauchy Goursat care spune că dacă o funcţie este olomorfă într-un disc, atunci integrala pe orice curbă închisă conţinută în acel disc este nulă. Astfel, având o curbă închisă Γ şi o alta Γ' care o conţine pe aceasta şi de aceeaşi orientare, integalele funcţiei noastre au aceeaşi valoare pe Γ şi Γ'. Astfel, alegem un disc suficient de mare, ce conţine spectrul lui A şi curba Γ, si are raza mai mare decât $\|A\|$. Atunci, conform celor de mai sus putem alege Γ cu proprietatea că $|\lambda| > \|A\|$ pentru orice $\lambda \in \Gamma$. Atunci vom avea $\left\|\frac{1}{\lambda}A\right\| < 1$, şi din teorema lui Riesz avem $\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^k}A^k$, de unde deducem că

$$R(\lambda; A) = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{k+1}}A^k.$$

Înmulţind cu $e^{\lambda t}$, integrând şi ţinând cont că convergenţa seriei este uniformă, conform criteriului lui Wierestrass obţinem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}R(\lambda; A)\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{k+1}}\mathrm{d}\lambda = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{k+1}}\mathrm{d}\lambda\ A^k.$$

Acum folosim formula lui Cauchy pentru calculul derivatei unei funcţii olomorfe în Ω çu C un cerc conţinut în Ω

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}\mathrm{d}u,$$

pentru z din interiorul lui C. Având în vedere discuţia de mai sus, această formulă rămâne adevărată dacă înlocuim C cu o altă curbă închisă care conţine C. Prin urmare, în cazul nostru pentru $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ calculul derivatei de ordinul k în 0 ne conduce la

$$t^k = \left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k} e^{\lambda t}\right)(0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{k+1}}\mathrm{d}\lambda,$$

adică $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{k+1}}\mathrm{d}\lambda = \frac{t^k}{k!}$, prin urmare

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda; A)\mathrm{d}\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = e^{tA}.$$

□

Teorema 1.2.5. *Dacă $T(t) = e^{tA}$ şi $A \in \mathcal{B}(X)$, atunci $\omega_0(T) = \sup \mathrm{Re}\sigma(\mathrm{A})$.*

Demonstraţie: Fie $\lambda \in \sigma(A)$. Conform teoremei 1.2.4 în mod necesar vom avea $\mathrm{Re}\lambda \leq \omega_0(\mathrm{T})$, de unde rezultă imediat că $\sup \mathrm{Re}\sigma(\mathrm{A}) \leq \omega_0(\mathrm{T})$, pentru orice A generator infinitezimal al unui $\mathcal{C}_0$-semigrup.

Să presupunem acum că $\sup \mathrm{Re}\sigma(\mathrm{A}) < \omega_0(\mathrm{T})$, ceea ce implică existenţa lui $\nu \in (\sup \mathrm{Re}\sigma(\mathrm{A}), \omega_0(\mathrm{T}))$. Fie Γ o curbă închisă, rectificabilă Jordan, pozitiv orientată ce conţine $\sigma(A)$, cu proprietatea că pentru orice $\lambda \in \Gamma$ să avem $\mathrm{Re}\lambda < \nu$. Atunci, din teorema precedentă

$$\begin{aligned}\|e^{tA}\| = \|T(t)\| &= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda; A)\mathrm{d}\lambda\right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma e^{\mathrm{Re}\lambda \mathrm{t}} \|R(\lambda; A)\|\mathrm{d}\lambda \leq \frac{1}{2\pi}\ell(\Gamma) e^{\nu t} \sup_{\lambda\in\Gamma} \|R(\lambda; A)\| = M e^{\nu t},\end{aligned}$$

unde $\ell(\Gamma)$ este lungimea curbei Γ şi $M = \max\left\{\frac{1}{2\pi}\ell(\Gamma)\sup_{\lambda\in\Gamma}\|R(\lambda; A)\|, 1\right\}$. Prin urmare din definiţia lui $\omega_0(T)$ ar rezulta că $\omega_0(T) \leq \nu$, ceea ce este în contradiţie cu presupunerea făcută.

În concluzie $\sup \mathrm{Re}\sigma(\mathrm{A}) = \omega_0(\mathrm{T})$. □

Remarca 1.2.1. După cum am văzut în Teorema 1.2.4 orice număr complex λ cu $\mathrm{Re}\lambda > \omega_0(\mathrm{T})$ se află în rezolventa lui A, şi în concluzie are loc inegalitatea $\sup \mathrm{Re}\sigma(\mathrm{A}) \leq \omega_0(\mathrm{T})$. În teorema precedentă am văzut că apare egalitatea în cazul în care generatorul este operator mărginit. În general, inegalitatea poate fi şi strictă, după cum se poate vedea într-un exemplu dat de Zabczyk în [17]. Mai mult, pentru orice două numere reale $a < b$ se poate construi un $\mathcal{C}_0$ semigrup $\{T_t\}_{t\geq 0}$ cu generatorul infinitezimal A, astfel încât $a = \sup \mathrm{Re}\sigma(\mathrm{A})$ şi $b = \omega_0(T)$. Pentru mai multe detalii vezi [13]

Propoziţia 1.2.5. *Fie $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrup de operatori astfel încât există $t_0 > 0$ cu $T(t_0)$ operator inversabil. Atunci $T(t)$ este inversabil pentru orice $t \geq 0$.*

Demonstraţie: Dacă $t \in (0, t_0)$ atunci $T(t_0) = T(t_0 - t)T(t) = T(t)T(t_0 - t)$ ceea ce implică faptul că $T(t)$ este inversabil.

Dacă $t > t_0$ notăm cu $n = \left\lfloor \dfrac{t}{t_0} \right\rfloor \in \mathbb{N}^*$ şi obţinem $nt_0 \leq t < (n+1)t_0$. Astfel $T(t) = T(t - nt_0)T(t_0)^n$, ceea ce este o compunere de operatori inversabili pentru că $t - nt_0 < t_0$ (vezi cazul anterior) şi $T(t_0)$ este inversabil din ipoteză. În concluzie $T(t)$ este inversabil. □

Propoziţia 1.2.6. *Dacă $\{T_t\}_{t \geq 0}$ este un $\mathcal{C}_0$-semigrup de operatori inversabili, atunci $\{T_t^{-1}\}_{t \geq 0}$ este deasemenea un $\mathcal{C}_0$-semigrup.*

Demonstraţie: Proprietatea de semigrup este imediată. Pentru a demonstra proprietatea de $\mathcal{C}_0$-semigrup, procedăm după cum urmează. Fie $x \in X$ şi $h \in (0, 1)$. Atunci $T(1) = T(h)T(1 - h)$, de unde deducem că $T^{-1}(h)x = T(1 - h)T^{-1}(1)x$şi prin trecere la limită pentru $h \to 0_+$ se obţine rezulatul dorit. □

Propoziţia 1.2.7. *Fie $\{T_t\}_{t \geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semigrup de operatori inversabili cu generatorul infinitezimal A. Atunci $-A$ este generatorul infinitezimal al $\mathcal{C}_0$-semigrupului $\{T_t^{-1}\}_{t \geq 0}$.*

Demonstraţie: Fie $x \in D(A)$. Atunci

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{T^{-1}(h)x - x}{h} + Ax \right\| = \left\| T^{-1}(h)\frac{x - T(h)x}{h} + Ax \right\| \leq \\
&\leq \|T^{-1}(h)\| \left\| \frac{x - T(h)x}{h} + Ax \right\| + \|Ax - T(h)Ax\| \leq \\
&\leq Me^{\omega h} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| + \|T(h)Ax - Ax\| \xrightarrow[h \to 0_+]{} 0
\end{aligned}$$

de unde rezultă că $-A$ este generatorul infinitezimal al semigrupului $\{T^{-1}(t)\}_{t \geq 0}$. □

1.3 Semigrupuri în Spaţii Hilbert

În această secţiune, vom demonstra faptul că adjunctul unui semigrup definit pe un spaţiu Hilbert este deasemenea un $\mathcal{C}_0$-semigrup, şi vom găsi relaţia dintre generatorul infinitezimal al semigrupului iniţial şi generatorul infinitezimal al adjunctului semigrupului iniţial.

Fie X un spaţiu Hilbert, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semigrup cu generatorul infinitezimal $A : D(A) \subset X \to X$. Vom nota cu

$$D(A^*) = \{y \in X : x \mapsto \langle Ax, y\rangle : D(A) \to \mathbb{R} \text{ sau } \mathbb{C} \text{ este mărginită}\}.$$

Atunci din teorema de reprezentare a lui Riesz există un singur $y* \in X$ cu $\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$, pentru orice $x \in D(A)$. Definim $A^* : D(A^*) \to X$, prin $A^*y = y^*$ denumit adjunctul lui A. Proprietatea caracterizantă a adjunctului este

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle,\ \forall x \in D(A),\ \forall y \in D(A^*),$$

Următoarea teoremă demonstrează faptul că A^* este dens definit.

Teorema 1.3.1. $\overline{D(A^*)} = X$.

Demonstraţie: Să presupunem prin reducere la absurd că $\overline{D(A^*)} \neq X$. Atunci există $y_0 \in X$, $y_0 \neq 0$ astfel încât $\langle y_0, y\rangle = 0$ pentru orice $y \in D(A^*)$, fapt care rezultă din descompunerea $X = \overline{D(A^*)} \oplus D(A^*)^{\perp}$. Deoarece A este operator liniar închis, deducem că graficul său $G_A = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$ este un subspaţiu liniar închis în $X \times X$ cu proprietatea că $(0, y_0) \notin G_A$.

Aplicăm teorema Hahn-Banach, care spune că există o funcţională liniară definită pe $X \times X$ care se anulează pe G_A şi nu se anulează în $(0, y_0)$. Fiind o funcţională în spaţiul Hilbert $X \times X$ cu produsul scalar $\langle (a, b), (c, d)\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, d\rangle$, din teorema de reprezentare a lui Riesz, ştim că există $(u, v) \in X \times X$ astfel încât funcţionala noastră să aibă forma $(x, y) \mapsto \langle (x, y), (u, v)\rangle$. Prin urmare, din definţia acestei funcţionale avem

$$\langle (0, y_0), (u, v)\rangle = \langle u, 0\rangle + \langle v, y_0\rangle \neq 0,$$

şi

$$\langle (x, Ax), (u, v)\rangle = \langle u, x\rangle + \langle v, Ax\rangle = 0,\ \forall x \in D(A).$$

Prin urmare $\langle Ax, v\rangle = -\langle x, u\rangle, \forall x \in D(A)$, ceea ce ne arată că $v \in D(A^*)$, adică $\langle y_0, v\rangle = 0$, ceea ce contrazice relaţia $\langle (0, y_0), (u, v)\rangle \neq 0$.

Astfel am ajuns la o contradicţie, ceea ce ne arată că presupunerea făcută a fost falsă. Prin urmare $\overline{D(A^*)} = X$. □

Teorema 1.3.2. *Fie X un spaţiu Hilbert şi $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semigrup cu generatorul infinitezimal A. Atunci $\{T_t^*\}_{t\geq 0}$ este un $\mathcal{C}_0$-semigrup cu generatorul A^*.*

Demonstraţie: Proprietatea de semigrup este imediată, prin trecere la adjuncţi. Să demonstrăm acum proprietatea de $\mathcal{C}_0$-semigrup. Fie $x \in D(A),\ y \in D(A^*)$.

$$\begin{aligned}|\langle x, T^*(h)y - y\rangle| &= |\langle T(h)x - x, y\rangle| = \left|\left\langle \int_0^h AT(\tau)x\mathrm{d}\tau, y\right\rangle\right| = \\ &= \left|\int_0^h \langle AT(\tau)x, y\rangle\mathrm{d}\tau\right| = \left|\int_0^h \langle T(\tau)x, A^*y\rangle\mathrm{d}\tau\right| \le \int_0^h |\langle T(\tau)x, A^*y\rangle|\mathrm{d}\tau \le \\ &\le Me^{\omega h}\|x\|\|A^*y\|h,\end{aligned}$$

unde M şi ω sunt din proprietatea de creştere exponenţială a lui $\{T_t\}_{t\ge 0}$ şi ultima inegalitate este inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz între produsul scalar şi norma generată de acesta.

Deoarece $\overline{D(A)} = X$, pentru un şir $(x_n) \subset D(A)$ care converge la $T^*(h)y - y$ folosind inegalitatea descoperită mai sus obţinem că $\|T^*(h)y - y\| \le Me^{\omega h}\|A^*y\|h,\ \forall y \in D(A^*)$, şi astfel pentru $h \to 0_+$ se obţine $\lim\limits_{h\to 0_+} T^*(h)y = y,\ \forall y \in D(A^*)$.

Dar deasemenea $\overline{D}(A^*) = X$, ceea ce implică imediat faptul că $\lim\limits_{h\to 0_+} T^*(h)y = y,\ \forall y \in X$, adică $\{T_t^*\}_{t\ge 0}$ este un $\mathcal{C}_0$-semigrup.

Fie B generatorul lui $\{T_t^*\}_{t\ge 0},\ x \in D(A)$ şi $y \in D(B)$. Atunci

$$\left\langle x, \frac{T^*(h)y - y}{h}\right\rangle = \left\langle \frac{T(h)x - x}{h}, y\right\rangle,\ \forall h > 0,$$

ceea ce este echivalent cu $\langle x, Bx\rangle = \langle Ax, x\rangle,\ \forall x \in D(A)$. Astfel deducem că funcţionala

$$x \mapsto \langle Ax, y\rangle : D(A) \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

este mărginită (continuă), de unde rezultă că $y \in D(A^*)$ şi $A^*y = By,\ \forall y \in D(B)$. Prin urmare $D(B) \subset D(A^*)$ şi $A^*y = By,\ \forall y \in D(B)$.

Fie acum $x \in D(A)$ şi $y \in D(A^*)$. Avem

$$\begin{aligned}\langle x, T^*(h)y - y\rangle &= \langle T(h)x - x, y\rangle = \left\langle \int_0^h AT(\tau)x\mathrm{d}\tau, y\right\rangle = \int_0^h \langle AT(\tau)x, y\rangle\mathrm{d}\tau = \\ &= \int_0^h \langle x, T^*(\tau)A^*y\rangle\mathrm{d}\tau = \left\langle x, \int_0^h T^*(\tau)A^*t\mathrm{d}\tau\right\rangle,\ \forall x \in D(A).\end{aligned}$$

Deoarece $\overline{D(A)} = X$ vom avea $T^*(h)y - y = \int_0^h T^*(\tau)A^*y\mathrm{d}\tau,\ \forall y \in D(A^*)$, şi astfel

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{T^*(h)y - y}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\int_0^h T^*(\tau)A^*y\mathrm{d}\tau = A^*y.$$

Prin urmare $y \in D(B)$ şi $By = A^*y$ ceea ce implică $D(A^*) \subset D(B)$.

În concluzie $D(A^*) = D(B)$ şi $A^* = B$. $\square$

Capitolul 2

Teoreme de generare pentru $\mathcal{C}_0$-semigrupuri

În capitolul precedent am văzut că fiecare $\mathcal{C}_0$-semigrup are un generator infinitezimal $A : D(A) \to X$, care are următoarele proprietăţi:

- generatorul este operator închis
- domeniul de definiţie este dens în X
- spectrul său este conţinut într-un semiplan stâng al planului complex

Aceste condiţii nu sunt suficiente, aşa cum putem vedea din următorul exemplu.

Exemplul 2.0.1. Pe spaţiul

$$X := \{f \in C_0(\mathbb{R}_+) : \ f \text{ derivabilă cu derivata continuă pe } [0,1]\}$$

dotat cu norma $\|f\| = \sup\limits_{s\in\mathbb{R}_+} |f(s)| + \sup\limits_{s\in[0,1]} |f'(s)|$, considerăm operatorul $(A, D(A))$ definit prin $Af = f'$ pentru $f \in D(A) := \{f \in C_0^1(\mathbb{R}_+) : f' \in X\}$.

Spaţiul $C_0(\mathbb{R}_+)$ fiind spaţiul funcţiilor continue pe $\mathbb{R}_+$ care se anulează la infinit, putem vedea că definiţiile de mai sus sunt corecte, şi operatorul A este dens definit şi închis. Pentru $\lambda \in \mathbb{C}$ cu partea reală strict pozitivă, observăm că $(\lambda I - A)(f) = \lambda f - f'$. Ne interesează dacă acest operator este inversabil, adică din relaţia $\lambda f - f' = g$, unde $g \in X$ să putem afla pe f în funcţie de g. Acest lucru este posibil în modul următor.

$$\lambda f - f' = g \Leftrightarrow (-e^{-\lambda t} f(t))' = e^{-\lambda t} g(t) \Rightarrow e^{-\lambda t} f(t) = \int_t^\infty e^{-\lambda s} g(s) \mathrm{d}s$$
$$\Leftrightarrow f(t) = \int_t^\infty e^{-\lambda(s-t)} f(s) \mathrm{d}s.$$

Am integrat de la t la ∞ pentru că la infinit funcţiile considerate aveau limita 0. Prin urmare $R(\lambda; A)(f)(t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda(s-t)} f(s)\mathrm{d}s$ pentru $f \in X,\ t \geq 0$. Să presupunem acum că A generează un $\mathcal{C}_0$-semigrup $\{T_t\}_{t\geq 0}$ pe X. Pentru $f \in D(A)$ şi $s, t \geq 0$ definim

$$\xi(\tau) := (T(t-\tau)f)(s+\tau),\ \tau \in [0,t]$$

care e o funcţie derivabilă şi derivata ei satisface

$$\dot{\xi}(\tau) = -(T(t-\tau)Af)(s+\tau) + (T(t-\tau)f')(s+\tau) = 0$$

şi prin urmare $(T(t)f)(s) = \xi(0) = \xi(t) = f(s+t)$. Aceasta ne arată că $\{T_t\}_{t\geq 0}$ ar trebui să fie semigrupul de translaţii, însă acesta nu îl invariază pe X.

Prin urmare condiţiile enunţate nu sunt suficiente pentru ca A să fie un generator de $\mathcal{C}_0$-semigrup.

O altă condiţie necesară se poate obţine folosind transformata Laplace a semigrupului (Teorema 1.2.4). Pentru $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $\mathrm{Re}\lambda > \omega_0(\mathrm{T})$ şi $\omega \in (\omega_0(T), \mathrm{Re}\lambda)$ şi M pe care îl putem găsi astfel încât $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ avem

$$\begin{aligned}\|R(\lambda; A)\| &\leq \int_0^\infty \|e^{-\mathrm{Re}\lambda \mathrm{t}}\|T(t)\|\|x\|\mathrm{d}t \\ &\leq M\|x\| \int_0^\infty e^{-(\mathrm{Re}\lambda-\omega)\mathrm{t}}\mathrm{d}t = \frac{M\|x\|}{\mathrm{Re}\lambda - \omega},\ \forall x \in X.\end{aligned}$$

Prin urmare o altă relaţie necesară este $\|R(\lambda; A)\| \leq \dfrac{M}{\mathrm{Re}\lambda - \omega}$ pentru $\omega > \omega_0(T)$, $\mathrm{Re}\lambda > \omega_0(\mathrm{T})$, $\omega \in (\omega_0(\mathrm{T}), \mathrm{Re}\lambda)$. Această condiţie se va dovedi şi suficientă în cazul în care $M = 1$. În teorema ce urmează vom considera condiţii de acest tip care ne asigură existenţa unui semigrup generat de A.

Cazul în care A este operator mărginit este simplu, prin folosirea funcţiei exponenţiale. Atunci când operatorul este nemărginit apar problemele.

Există mai multe moduri în care putem defini exponenţiala unui operator mărginit

- $e^{tA} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$
- $e^{tA} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda; A)\mathrm{d}\lambda$
- $e^{tA} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{t}{n}A\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n}$.

Ne interesează ce metode am putea folosi pentru a putea defini ”exponenţiala” unui anumit operator nemărginit. Primele două formule nu ne dau prea multe indicaţii în acest sens, dar partea a doua din formula a treia o putem scrie ca şi

$$e^{tA} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}; A\right)\right]^n,$$

formulă ce implică folosirea de puteri de operatori mărginiţi, şi aceasta a fost şi ideea lui Hille de a folosi această formulă şi a demonstra că în anumite cazuri această limită există, şi defineşte un $\mathcal{C}_0$-semigrup.

Deoarece ştim cum să definim exponenţiala unui operator mărginit, am putea să încercăm să aproximăm un operator nemărginit A printr-un şir de operatori mărginiţi $(A_n)_{n\geq 0}$ şi să sperăm că există limita $\lim\limits_{n\to\infty} e^{tA_n}$, care ar putea fi $\mathcal{C}_0$-semigrupul căutat. Aceasta a fost ideea lui Yosida, şi o vom vedea la lucru în teorema următoare.

2.1 Teorema Hille-Yosida

Teorema 2.1.1. (Teorema Hille-Yosida) *Fie $A : D(A) \subset X \to X$ un operator liniar, închis, cu $\overline{D(A)} = X$. Dacă există $M > 0$ şi $\omega \in \mathbb{R}$ astfel încât:*

i) $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$*;*

ii) $\|R(\lambda; A)^n\| \leq \dfrac{M}{(\lambda-\omega)^n}$*, oricare ar fi $\lambda > \omega$ şi oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$,*

atunci există un unic $\mathcal{C}_0$-semigrup $\{T_t\}_{t\geq 0}$, având pe A ca şi generator infinitezimal, şi $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, oricare ar fi $t \geq 0$.

Demonstrţie: Pentru a structura ideile, vom împâtţi demonstraţia în mai multe etape.

Etapa 1. **Arătăm că:**

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda; A)x = x, \text{ **oricare ar fi** } x \in X.$$

Fie $x \in D(A)$. Atunci $R(\lambda; A)(\lambda I - A)x = x$, de unde obţinem

$$\lambda R(\lambda; A)x - x = R(\lambda; A)Ax.$$

Prin trecere la normă deducem că

$$\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| = \|R(\lambda; A)Ax\| \leq \|R(\lambda; A)\|\|Ax\| \leq \frac{M}{\lambda-\omega}\|Ax\| \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0,$$

ceea ce arată că $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda; A)x = x$, pentru orice $x \in D(A)$.

Fie acum $x \in X$ şi $\varepsilon > 0$. Din densitatea lui $D(A)$ în X ştim că există $y \in D(A)$ astfel încât $\|x-y\| < \varepsilon$. Atunci

$$\begin{aligned}\|\lambda R(\lambda;A)x - x\| &\leq \|\lambda R(\lambda;A)x - \lambda R(\lambda;A)y\| + \|\lambda R(\lambda;Ay - y\| + \|x-y\| \leq \\ &\leq \|\lambda R(\lambda;A)\|\|x-y\| + \|\lambda R(\lambda;A)y - y\| + \|y-x\| \\ &\leq \frac{|\lambda|}{\lambda-\omega}M\|x-y\| + \|\lambda R(\lambda;A)y - y\| + \|y-x\|\end{aligned}$$

Trecând la limită superioară pentru $\lambda \to \infty$ în inegalitatea obţinută avem

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda;A)x - x\| \leq M\|x-y\| + \|x-y\| \leq (M+1)\varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar, rezultă că $\limsup\limits_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda;A)x - x\| = 0$, iar din inegalităţile

$$0 \leq \liminf_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda;A)x - x\| \leq \limsup_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda;A)x - x\| = 0,$$

rezultă că există $\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda;A)x - x\| = 0$.

Etapa a 2-a. **Arătăm că**

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^2 R(\lambda;A)x - \lambda x = Ax, \ \textbf{oricare ar fi } x \in D(A).$$

Fie $x \in D(A)$. Atunci, din aceaşi egalitate $R(\lambda;A)(\lambda I - A)x = x$, obţinem $R(\lambda;A)x - x = R(\lambda;A)Ax$, care prin înmulţire cu λ devine

$$\lambda^2 R(\lambda;A)x - \lambda x = \lambda R(\lambda;A)Ax.$$

Trecem la limită pentru $\lambda \to \infty$ în inegalitatea precedentă, şi folosim *Etapa 1.* pentru a obţine ceea ce ne-am propus.

Etapa a 3-a. **Notăm $S_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$, unde $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda;A) - \lambda I$ şi arătăm că există $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)x$ care este uniformă pe orice interval mărginit $[0,b]$, pentru fiecare $x \in X$.**

Avem

$$\begin{aligned}\|S_\lambda(t)\| &= \left\|e^{-\lambda t + \lambda^2 t R(\lambda;A)}\right\| = e^{-\lambda t}\|e^{\lambda^2 t R(\lambda;A)}\| = \\ &= e^{-\lambda t}\left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k(\lambda^2 R(\lambda;A))^k}{k!}\right\| \leq e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k(\lambda^{2k}\|R(\lambda;A)\|^k\|}{k!} \leq \\ &\leq e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2 t)^k M}{k!(\lambda-\omega)^k} = Me^{-\lambda t}e^{\frac{\lambda^2 t}{\lambda-\omega}} = Me^{\frac{\lambda\omega t}{\lambda-\omega}}.\end{aligned}$$

Fie $r > 1$. Deoarece $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda}{\lambda-\omega} = 1$, există $\delta(r) > 0$ astfel încât oricare ar fi $\lambda > \delta$ să avem $\dfrac{\lambda}{\lambda-\omega} < r$, ceea ce e echivalent cu $\lambda < \lambda r - \omega r$. Mai departe, $\lambda(1-r) < -\omega r$, de unde obţinem $\lambda > \dfrac{\omega r}{r-1}$, pe care îl alegem pe post de $\delta(r)$. Astfel, oricare ar fi $r > 1$ şi oricare ar fi $\lambda > \delta(r)$ avem $\|S_\lambda(t)\| \leq Me^{r\omega t}$, ceea ce ne arată că $S_\lambda(t)$ privită ca şi funcţie de λ este o funcţie mărginită pe $(\delta(r), \infty)$.

Fie $x \in D(A)$. Atunci $A_\lambda x \to Ax$ pentru $\lambda \to \infty$, conform etapei 2. Prin urmare

$$\begin{aligned} S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} x \mathrm{d}s = \\ &= \int_0^1 \left(e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} tA_\lambda x - e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} tA_\mu x\right) \mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 te^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} (A_\lambda x - A_\mu x) \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Trecând la normă obţinem

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\| &\leq \int_0^1 t\|e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu}\| \|A_\lambda x - A_\mu x\| \mathrm{d}s \leq \\ &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \int_0^1 \|e^{stA_\lambda}\| \|e^{(1-s)tA_\mu}\| \mathrm{d}s \leq \\ &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \int_0^1 Me^{r\omega st} Me^{r\omega(1-s)t} \mathrm{d}s = \\ &= M^2 t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \int_0^1 e^{r\omega t} \mathrm{d}s \leq \\ &\leq M^2 te^{r\omega t} \|A_\lambda x - A_\mu x\|, \end{aligned}$$

pentru orice $\lambda, \mu > \delta(r)$ şi $r > 1$.

Pentru $t \in [0, b],\ b \in \mathbb{R}_+$ avem

$$\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\| \leq \left(\sup_{s\in[o,b]} M^2 se^{r\omega s}\right) \|A_\lambda x - A_\mu x\| \xrightarrow[\lambda,\mu\to\infty]{} 0.$$

Cum $S_\lambda(t)$ este uniform mărginit după $\lambda > \delta(r)$ rezultă că există $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)x$ care este uniformă pe fiecare interval $[0, b]$ şi notăm cu $T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)x$, pentru orice $x \in X$.

Etapa a 4-a. **Demonstrăm caum că $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este $\mathcal{C}_0$-semigrupul căutat.**

Avem $S_\lambda(0)x = Ix = x$, pentru orice λ, de unde deducem că $T(0)x = x$, oricare ar fi $x \in X$, adică $T(0) = I$.

Analog, dacă $s, t \geq 0$ avem $S_\lambda(s+t)x = e^{(s+t)A_\lambda} x = e^{sA_\lambda} e^{tA_\lambda} x = S_\lambda(s)S_\lambda(t)x$, pentru orice λ. Prin trecere la limită cu $\lambda \to \infty$ avem $T(s+t)x = T(s)T(t)x$, oricare ar fi $x \in X$.

Pentru $t \geq 0$, avem $\|S_\lambda(t)x\| \leq Me^{r\omega t}\|x\|$, oricare ar fi $\lambda > \delta(r)$ şi $x \in X$, pentru $\lambda \to \infty$ obţinem $\|T(t)x\| \leq Me^{r\omega t}\|x\|$, oricare ar fi $x \in X$, şi oricare ar fi $r > 1$. Pentru $r \to 1$ deducem $\|T(t)x\| \leq Me^{\omega t}\|x\|$, oricare ar fi $x \in X$, ceea ce implică $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$.

Verificăm acum proprietatea de tare continuitate. Din $\lim\limits_{t\to 0_+} S_\lambda(t)x = x$, pentru orice $x \in X$ şi $\lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)x = T(t)x$ uniform pe $[0, b]$, ţinând cont că putem interschimba limitele între ele, una fiind uniformă rezultă că

$$\lim_{t\to 0_+} T(t)x = \lim_{t\to 0_+} \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} \lim_{t\to 0_+} S_\lambda(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} x = x, \ \forall x \in X.$$

Astfel $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este un $\mathcal{C}_0$-semigrup.

Astfel există B, generatorul infinitezimal al lui $\{T_t\}_{t\geq 0}$. În continuare, dorim să demonstrăm că $A = B$.

Fie $x \in D(A)$. Avem următoarele relaţii:

$$\begin{aligned}\|S_\lambda(\tau)A_\lambda x - T(\tau)Ax\| &= \|S_\lambda(\tau)A_\lambda x - S_\lambda(\tau)Ax + S_\lambda(\tau)Ax - T(\tau)Ax\| \leq \\ &\leq \|S_\lambda(\tau)\|\|A_\lambda x - Ax\| + \|S_\lambda(\tau)Ax - T(\tau)Ax\| \leq \\ &\leq Me^{r\omega\tau}\|A_\lambda x - Ax\| + \|S_\lambda(\tau)Ax - T(\tau)Ax\| \leq \\ &\leq \left(\sup_{s\in[0,t]} Me^{re\omega s}\right)\|A_\lambda x - Ax\| + \|S_\lambda(\tau)Ax - T(\tau)Ax.\|\end{aligned}$$

Trecând la limită pentru $\lambda \to \infty$ obţinem că $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \|S_\lambda(\tau)A_\lambda x - T(\tau)Ax\| = 0$ uniform în raport cu $\tau \in [0, t]$.

Pentru $x \in D(A)$ avem $S_\lambda(t)x - x = \displaystyle\int_0^t S_\lambda(\tau)A_\lambda x \mathrm{d}\tau$. Trecând la limită pentru $\lambda \to \infty$ şi folosind convergenţa uniformă pentru a schimba limita cu integrala obţinem că $T(t)x - x = \displaystyle\int_0^t T(\tau)Ax\mathrm{d}\tau$, oricare ar fi $x \in D(A)$. Astfel avem

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(\tau)Ax\mathrm{d}\tau \xrightarrow[t\to 0_+]{} T(0)Ax = Ax.$$

Astfel am obţinut că $D(A) \subset D(B)$ şi $Bx = Ax$, oricare ar fi $x \in D(A)$.

Fie $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > \omega$. Atunci $\lambda \in \rho(B) \cap \rho(A)$ şi $(\lambda I - A)(D(A)) = (\lambda I - B)(D(A)) \subset (\lambda I - B)(D(B))$. Cum $\lambda I - A : D(A) \to X$ este inversabil, rezultă că $(\lambda I - A)(D(A)) = X$ şi din incluziunea precedentă $(\lambda I - B)(D(A)) = X$. Cum, deasemenea $\lambda \in \rho(B)$ avem $R(\lambda; B)X = R(\lambda; B)(\lambda I - B)(D(A))$, adică $R(\lambda; B)X = D(A)$, ceea ce este echivalent cu $D(A) = D(B)$. Prin urmare $A = B$, şi $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este semigrupul căutat. □

O consecinţă imediată a teoremei de mai sus este

Corolarul 2.1.1. *Fie $A : D(A) \subset X \to X$ un operator liniar închis, cu $\overline{D(A)} = X$ pentru care există $\omega \in \mathbb{R}$ astfel încât* *i* $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$*;*

ii) $\|R(\lambda; A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda - \omega}$, $\forall \lambda > \omega$.

Atunci există $\{T_t\}_{t \geq 0}$ *un* $\mathcal{C}_0$*-semigrup cu* $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$*, oricare ar fi* $t \geq 0$*, având-ul pe* A *ca şi generator infinitezimal.*

Demonstraţie: Avem $\|R(\lambda; A)^n\| \leq \|R(\lambda; A)\|^n \leq \dfrac{1}{(\lambda - \omega)^n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, oricare ar fi $\lambda > \omega$. Din Teorema Hille-Yosida ($M = 1$) rezultă că există un unic $\mathcal{C}_0$-semigrup $\{T_t\}_{t \geq 0}$ care îl are pe A ca şi generator infinitezimal şi $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, oricare ar fi $t \geq 0$. □

Teorema Hille-Yosida este foarte greu de folosit în aplicaţii concrete pentru $M > 1$, datorită condiţiei iii), care necesită o infinitate de verificări. Vom prezenta mai departe o altă teoremă, echivalentă cu Teorema Hille-Yosida, care poate fi folosită mult mai uşor în aplicaţii.

Definiţia 2.1.1. Un operator $T : D(T) \subset X \to X$, unde X este un spaţiu Banach se numeşte *acretiv* dacă pentru orice $\lambda > 0$ avem

$$\|(I + \lambda T)x - (I + \lambda T)y\| \geq \|x - y\|, \ \forall x, y \in D(T), \ \forall \lambda > 0.$$

Remarca 2.1.1. În cazul în care X este un spaţiu prehilbertian, un operator $T : D(T) \subset X \to X$ se numeşte *monoton* dacă $\mathrm{Re}\langle \mathrm{Fx} - \mathrm{Fy}, \mathrm{x} - \mathrm{y} \rangle \geq 0$, pentru orice $x, y \in D(T)$. Atunci are loc echivalenţa

$$T \text{ este acretiv } \Leftrightarrow T \text{ este monoton}$$

În continuare, pentru un operator $T : D(T) \subset X \to X$ vom nota cu $\mathcal{R}(T)$ imaginea lui $D(T)$ prin T.

Vom avea nevoie de următoarea propoziţie:

Propoziţia 2.1.1. *Dacă* $\{T_t\}_{t \geq 0}$ *este un* $\mathcal{C}_0$*-semigrup atunci există* $\omega \in \mathbb{R}$ *şi o normă echivalentă* $\|\cdot\|_e$ *pe* X *astfel încât* $\|T(t)x\|_e \leq e^{\omega t}\|x\|_e$ *pentru orice* $x \in X$ *şi orice* $t \geq 0$*.*

Demonstraţie: Din proprietatea de creştere exponenţială există $M, \omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$, astfel încât $\|T(t)x\| \leq Me^{\omega t}\|x\|$ pentru orice $t \geq 0$ şi orice $x \in X$. Definim

$$\|x\|_e = \sup_{t \geq 0} e^{-\omega t}\|T(t)x\| (\leq M), \ \forall x \in X,$$

şi observăm că $\|x\| \leq \|x\|_e \leq M\|x\|$ şi $\|\alpha x\|_e = |\alpha|\|x\|_e$ pentru orice $x \in X$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Deasemenea $\|x\|_e\| = 0$ implică $\|x\| = 0$ adică $x = 0$. Mai mult

$$\begin{aligned} \|x + y\|_e &= \sup_{t \geq 0} e^{-\omega t}\|T(t)x + T(t)y\| \leq \\ &\leq \sup_{t \geq 0} e^{-\omega t}\|T(t)s\| + \sup_{t \geq 0} e^{-\omega t}\|T(t)y\| = \\ &= \|x\|_e + \|y\|_e, \ \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

Prin urmare $\|\cdot\|_e$ este o normă echivalentă cu norma iniţială. În sfârşit

$$\begin{aligned}\|T(t)x\|_e = \sup_{\tau\geq 0} e^{-\omega t}\|T(t+\tau)x\| = \sup_{s\geq t} e^{-\omega(s-t)}\|T(s)x\| \leq \\ \leq e^{\omega t}\sup_{s\geq 0} e^{-\omega s}\|T(s)x\| = e^{\omega t}\|x\|_e,\ \forall t\in R_+,\ \forall x\in X.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.2. *Un operator liniar $A: D(A)\subset X\to X$, unde X este un spaţiu Banach, este generatorul infinitezimal al unui $\mathcal{C}_0$-semigrup $\{T_t\}_{t\geq 0}$ care satisface $\|T(t)\|\leq Me^{\omega t}$, pentru orice $t\geq 0$ dacă şi numai dacă $D(A)$ este dens în X, $\mathcal{R}(\lambda I-A)=X$ pentru orice $\lambda>0$ suficient de mic, există o normă echivalentă $\|\cdot\|_e$ pe X astfel încât $\omega I-A$ este acretiv în raport cu norma $\|\cdot\|_e$ şi $\|T(t)x\|_e\leq e^{\omega t}\|x\|_e$ pentru orice $t\geq 0$ şi pentru orice $x\in X$.*

Demonstraţie: **Necesitatea:** Conform Propoziţiei 2.1.2 există $\omega\in R$ şi o normă echivalentă $\|\cdot\|_e$ astfel încât $\|T(t)x\|_e\leq e^{\omega t}\|x\|_e$, pentru orice $x\in X$ şi pentru orice $t\geq 0$. Definim $F_\lambda\in\mathcal{B}(X)$ pentru $\lambda>0$ şi $\lambda\omega<1$ prin

$$F_\lambda x = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-t/\lambda}T(t)x\mathrm{d}t,\ \forall x\in X,$$

şi observăm că

$$\|F_\lambda x\|_e \leq \frac{\|x\|_e}{\lambda}\int_0^\infty e^{(\omega-1/\lambda)t}\mathrm{d}t = \|x\|_e\frac{1}{1-\lambda\omega},$$

pentru orice $x\in X$, şi $\lambda>0$ cu $\lambda\omega<1$. Deasemenea, dacă $h>0$ şi $x\in X$ avem

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(T(h)-I)F_\lambda x &= \frac{1}{\lambda h}\int_0^\infty e^{-t/\lambda}(T(t+h)x-T(t)x)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\lambda h}\int_h^\infty e^{-(\tau-h)/\lambda}T(\tau)x\mathrm{d}\tau - \frac{1}{\lambda h}e^{-\tau/\lambda}T(\tau)x\mathrm{d}\tau\\ &= \frac{1}{h}(e^{h/\lambda}-1)F_\lambda x - \frac{1}{\lambda h}e^{h/\lambda}\int_0^h e^{-\tau/\lambda}T(\tau)x\mathrm{d}\tau \to\\ &\xrightarrow[h\to 0_+]{} \frac{1}{\lambda}F_\lambda x - \frac{1}{\lambda}x\end{aligned}$$

Prin urmare $F_\lambda x\in D(A)$ şi $\lambda AF_\lambda x = F\lambda x - x$ pentru orice $x\in X$. De aici deducem că $\mathcal{R}(I-\lambda A)=X$ şi $(I-\lambda A)F_\lambda = I$. Folosind linearitatea lui A şi faptul că A este închis, observăm că pentru orice $x\in D(A)$ avem

$$\begin{aligned}\lambda F_\lambda Ax &= \int_0^\infty e^{-t/\lambda}T(t)Ax\mathrm{d}t = \int_0^\infty A(e^{-t/\lambda}T(t)x)\mathrm{d}t\\ &= A\left(\int_0^\infty e^{-t/\lambda}T(t)x\mathrm{d}t\right) = \lambda AF_\lambda x\end{aligned}$$

Astfel am obţinut că $(I - \lambda A)F_\lambda x = F_\lambda(I - \lambda A)x = x$ pentru orice $x \in D(A)$. Prin urmare $I - \lambda A$ este inversabil cu $(I - \lambda A)^{-1} = F_\lambda \in \mathcal{B}(X)$. Mai departe, pentru $\lambda > 0$ cu $\lambda\omega < 1$ dacă luăm $\mu = \dfrac{\lambda}{1 - \lambda\omega}$, atunci estimarea precedentă pentru $\|F_\lambda x\|_e$ implică faptul că

$$\begin{aligned}\|x + \mu(\omega I - A)x\|_e &= (1 - \lambda\omega)^{-1}\|(1 - \lambda\omega)x + \lambda(\omega I - A)x\|_e \\ &= (1 - \lambda\omega)^{-1}\|(I - \lambda A)x\|_e \geq \|x\|_e\end{aligned}$$

pentru orice $x \in D(A)$. Prin urmare $\omega I - A$ este acretiv. $D(A)$ este dens în X, pentru că A este generatorul unui semigrup. Astfel, demonstraţia necesităţii este finalizată.

Suficienţa: Fiind dată norma $\|\cdot\|_e$ astfel încât $\|x+\mu(\omega I-A)x\|_e \geq \|x\|_e$ pentru orice $x \in D(A)$, şi pentru orice $\mu > 0$, fiind dat $\lambda_0 > 0$ astfel încât $\lambda_0|\omega| < 1$ şi $\mathcal{R}(I - \lambda A) = X$ pentru orice $\lambda \in (0, \lambda_0)$ pentru orice $\lambda \in (0, \lambda_0)$ avem

$$\left\|x - \frac{\mu}{1 + \mu\omega}Ax\right\|_e \geq \frac{1}{1 + \mu\omega}\|x\|_e$$

pentru orice $x \in X, \mu > 0$ cu $\mu\omega > -1$. Definind $\lambda = \dfrac{\mu}{1 + \mu\omega}$ observăm că $\|x - \lambda Ax\| \geq (1 - \lambda\omega)\|x\|_e$ pentru orice $x \in D(A)$ şi $\lambda \in (0, \lambda_0)$. De aici deducem că $I - \lambda A$ este inversabil pe $\mathcal{R}(I - \lambda A) = X$ pentru $0 < \lambda < \lambda_0$. Dacă definim $J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ pentru $\lambda \in (0, \lambda_0)$ atunci $\|J_\lambda x\|_e \leq \dfrac{1}{1 - \lambda\omega}\|x\|_e$ pentru $x \in X$. Prin urmare J_λ este operator închis pentru $\lambda \in (0, \lambda_0)$ şi prin urmare A este închis.

Mai departe, deoarece $I - \lambda A$ este inversabil pentru λ suficient de mic ($\lambda \in (0, \lambda_0)$), putem afirma că $(\frac{1}{\lambda_0}, \infty) \subset \rho(A)$. Deasemenea, din inegalitatea $\|J_\lambda x\|_e \leq (1-\lambda\omega)^{-1}\|x\|_e$, pentru orice $x \in X$, deducem că pentru $\mu > \frac{1}{\lambda_0}$ avem

$$\|R(\mu, A)\|_e = \frac{1}{\mu}\|J_{\frac{1}{\mu}}\|_e \leq \frac{1}{\mu}\frac{1}{1 - \frac{\omega}{\mu}} = \frac{1}{\mu - \omega} \leq \frac{1}{\mu - \frac{1}{\lambda_0}}.$$

Deoarece norma $\|\cdot\|_e$ este echivalentă cu norma iniţială, deducem că există $a, b > 0$ astfel încât $a\|x\| \leq \|x\|_e \leq b\|x\|$. Folosind inegalităţile de mai sus obţinem că $\|R(\mu; A)^n\| \leq \frac{1}{(\mu-\omega)^n} \leq \frac{1}{\left(\mu-\frac{1}{\lambda_0}\right)^n}$. Astfel, folosind echivalenţa normelor obţinem

$$\|R(\mu; A)^n x\| \leq \frac{1}{a}\|R(\mu; A)^n x\|_e \leq \frac{1}{a}\frac{\|x\|_e}{(\mu - \omega)^n} \leq \frac{1}{a}\frac{\|x\|_e}{\left(\mu - \frac{1}{\lambda_0}\right)^n} \leq \frac{b}{a}\frac{\|x\|}{\left(\mu - \frac{1}{\lambda_0}\right)^n}.$$

Notând cu $M = b/a$ obţinem că operatorul A verifică şi condiţia a treia din Teorema Hille Yosida, şi astfel A este generatorul unui $\mathcal{C}_0$-semigrup $\{T_t\}_{t\geq 0}$. Deoarece $\|T(t)x\|_e \leq e^{\omega t}\|x\|_e$ avem în aceeaşi manieră ca şi mai sus

$$\|T(t)x\| \leq \frac{1}{a}\|T(t)x\|_e \leq \frac{1}{a}e^{\omega t}\|x\|_e \leq \frac{b}{a}e^{\omega t}\|x\| \leq Me^{\omega t}\|x\|.$$

$\square$

Aplicaţii ale Teoremei 2.1.2 se pot găsi în [16].

Pentru aplicaţii avem nevoie de următoarea teoremă, care face legătura între $\mathcal{C}_0$-semigrupuri şi problemele Cauchy.

Teorema 2.1.3. (Teorema de existenţă şi unicitate pentru problema Cauchy neomogenă) *Fie A generatorul infinitezimal al $\mathcal{C}_0$-semigrupului $\{T_t\}_{t\geq 0}$ şi $f:\mathbb{R}_+\to X$, f de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{R}_+$. Problema Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t)+f(t) \\ x(0) &= x_0\in D(A) \end{cases}$$

are soluţie unică dată de

$$x(t)=T(t)x_0+\int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s.$$

Demonstraţie: Notăm $y(t)=\displaystyle\int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s$ şi arătăm că $\dot{y}(t)=Ay(t)+f(t)$. Făcând schimbarea de variabilă $\tau=t-s$ obţinem

$$y(t)=\int_0^t T(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Mai departe calculăm

$$\begin{aligned}\frac{y(t+h)-y(t)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h}T(\tau)f(t+h-\tau)\mathrm{d}\tau-\frac{1}{h}\int_0^t T(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau= \\ &= \frac{1}{h}\int_0^t T(\tau)(f(t+h-\tau)-f(t-\tau))\mathrm{d}\tau+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(\tau)f(t+h-\tau)\mathrm{d}\tau= \\ &= \int_0^t T(\tau)\frac{f(t+h-\tau)-f(t-\tau)}{h}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(\tau)f(t+h-\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Mai departe, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t+h-\tau)-f(t-\tau)}{h}=f'(t-\tau)$, de unde obţinem că

$$\lim_{h\to 0}T(\tau)\frac{f(t+h-\tau)-f(t-\tau)}{h}=T(\tau)f'(t-\tau),$$

oricare ar fi $\tau\in[0,t]$.

Folosind Teorema lui Lagrange şi notând cu $S=\sup\limits_{s\in[0,t]}Me^{\omega s}$ cu M,ω din proprietatea de creştere exponenţială, avem

$$\left\|T(\tau)\frac{f(t+h-\tau)-f(t-\tau)}{h}\right\|=\|T(\tau)f'(c)\|\leq S\sup_{c\in[0,2t]}f'(c),\ \forall t\in[0,t].$$

Din Teorema Convergenţei Dominate a lui Lebesgue, obţinem că

$$\lim_{h\to 0_+}\int_0^t T(\tau)\frac{f(t+h-\tau)-f(t-\tau)}{h}\mathrm{d}\tau = \int_0^t T(\tau)f'(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h} &= \lim_{h\to 0}\int_0^t T(\tau)\frac{f(t+h-\tau)-f(t-\tau)}{h}\mathrm{d}\tau+\\ &+\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(\tau)f(t+h-\tau)\mathrm{d}\tau =\\ &=\int_0^t T(\tau)f'(t-\tau)\mathrm{d}\tau + T(t)f(0),\end{aligned}$$

de unde rezultă că y e derivabilă şi

$$\dot{y}(t) = \int_0^t T(\tau)f'(t-\tau)\mathrm{d}\tau + T(t)f(0).$$

Mai departe avem

$$\frac{T(h)y(t)-y(t)}{h} = \frac{\int_0^t T(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s - \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s}{h}$$

şi

$$y(t+h)-y(t) = \int_0^t T(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s - \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s + \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s.$$

Combinând cele două rezultate de mai sus obţinem

$$\begin{aligned}\frac{T(h)y(t)-y(t)}{h} &= \frac{y(t+h)-y(t)-\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s}{h} =\\ &= \frac{y(t+h)-y(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Astfel obţinem că

$$\lim_{h\to 0_+}\frac{T(h)y(t)-y(t)}{h} = \dot{y}(t) - T(0)f(t) = \dot{y}(t) - f(t).$$

Prin urmare $y(t)\in D(A)$ şi $Ay(t) = \dot{y}(t)-f(t)$, de unde rezultă că $\dot{y}(t) = Ay(t)+f(t)$. Înlocuind în expresia lui $\dot{x}(t)$ obţinem

$$\dot{x}(t) = AT(t)x_0 + Ay(t) + f(t) = Ax(t) + f(t).$$

Condiţia $x(0) = x_0$ este evident verificată, ceea ce ne arată că x este soluţie pentru problema Cauchy din enunţul Teoremei.

Având verificată existenţa soluţiei, să demonstrăm şi unicitatea acesteia. Presupunem prin absurd că ar exista două soluţii x_1, x_2 pentru problema Cauchy considerată. Atunci, dacă notăm $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$ observăm că z verifică problema Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z}(t) & = Az(t) \\ z(0) & = 0 \end{cases}.$$

Pentru $t > 0$ definim pe intervalul $[0, t]$ funcţia $u(s) = T(t-s)z(s)$ şi observăm că $\dot{u}(s) = -T(t-s)Az(s) + T(t-s)Az(s) = 0$, $\forall s \in [0, t]$. Acest rezultat ne arată că u este constantă pe $[0, t]$ şi în consecinţă $u(0) = u(t)$, fapt ce se traduce echivalent prin $T(t)z(0) = z(t) = 0$. Prin urmare z este funcţia identic nulă şi $x_1 \equiv x_2$. □

Luând în Teorema precedentă funcţia f ca fiind funcţia identic nulă obţinem colorarul următor.

Corolarul 2.1.2. *Fie A generatorul infinitezimal al $\mathcal{C}_0$-semigrupului $\{T_t\}_{t\geq 0}$. Problema Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = Ax(t) \\ x(0) & = x_0 \in D(A) \end{cases}$$

are soluţie unică dată de

$$x(t) = T(t)x_0.$$

2.2 Aplicaţii

Vom vedea în continuare cum se pot aplica teoremele demonstrate mai sus în demonstrarea faptului că un operator este într-adevăr generatorul unui $\mathcal{C}_0$-semigrup.

Aplicaţia 1. ([15]) Operatorul $A : D(A) \subseteq L^2(0, \pi) \to L^2(0, \pi)$, definit prin

$$\begin{cases} D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ Au = u'' \text{ pentru } u \in D(A) \end{cases}$$

este generatorul infinitezimal al unui $\mathcal{C}_0$-semigrup de contracţii.

Demonstraţie: Vom aplica Teorema Hille Yosida pentru $M = 1$ şi $\omega = 0$ pe spaţiul $X = L^2(0, \pi)$. Din definiţia spaţiului $H^2(0, \pi)$ rezultă că $D(A)$ este dens în $L^2(0, \pi)$ (vezi [3]). Mai departe, vrem să arătăm că pentru orice $\lambda > 0$ operatorul $\lambda I - A$ este bijectiv. Pentru aceasta considerăm $f \in L^2(0, \pi)$ şi observăm că ecuaţia $(\lambda I - A)u = f$ se rescrie echivalent sub forma

$$\begin{cases} \lambda u - u'' = f \\ u(p) = u(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $\lambda u - u'' = f$ este dată de

$$u(x) = c_1(x)e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2(x)e^{\sqrt{\lambda}x},$$

unde c_1 şi c_2 verifică sistemul dat de metoda variaţiei constantelor

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2'(x)e^{\sqrt{\lambda}x} = 0 \\ -\sqrt{\lambda}c_1'(x)e^{-\sqrt{\lambda}x} + \sqrt{\lambda}c_2'(x)e^{\sqrt{\lambda}x} = f(x) \end{cases}.$$

(Vezi Teorema 4.5.7, pag 116 din [14]). Rezultă atunci că

$$u(x) = k_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + k_2 e^{\sqrt{\lambda}x} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^\pi k(x.y)f(y)\mathrm{d}y,$$

unde

$$k(x,y) = \begin{cases} e^{\sqrt{\lambda}(y-x)} & \text{dacă } 0 \le x \le y \le \pi \\ e^{\sqrt{\lambda}(x-y)} & \text{dacă } 0 \le y \le x \le \pi \end{cases}.$$

Impunând condiţiile $u(0) = u(\pi) = 0$ obţinem un sistem compatibil determinat cu necunoscutele k_1 şi k_2. Prin urmare, ecuaţia $(\lambda I - A)u = f$ are o unică soluţie $u = (\lambda I - A)^{-1}f$, care se determină ca mai sus.

Înmulţind ambii termeni ai ecuaţiei $\lambda u - u'' = f$ cu u şi integrând de la 0 la π obţinem

$$\lambda\|u\|^2_{L^2(0,\pi)} + \|u'\|^2_{L^2(0,\pi)} = \langle f, u\rangle_{L^2(0,\pi)},$$

ceea ce implică

$$\|u\|_{L^2(0,\pi)} \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^2(0,\pi)}.$$

Cum $u = (\lambda I - A)^{-1}f$, ultima inegalitate ne arată că $\|(\lambda I - A)^{-1}f\|_{L^2(0,\pi)} \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^2(0,\pi)}$, pentru orice $f \in L^2(0,\pi)$. Trecând la supremum după $\|f\|_{L^2(0,\pi)} \le 1$ în ambii membri ai acestei inegalităţi obţinem că $\|R(\lambda; A)\| \le \frac{1}{\lambda}$. De aici putem deduce că $(\lambda I - A)^{-1}$ este închis, ceea ce implică faptul că $(\lambda I - A)$ este închis, adică A este închis.

Astfel A verifică ipotezele Teoremei Hille-Yosida pentru $M = 1$ şi $\omega = 0$, fapt ce ne arată că A este generatorul unui $\mathcal{C}_0$-semigrup cu proprietatea că $\|T(t)\| \le 1$ pentru orice $t \ge 0$. □

Aplicaţia 2. ([15]) Pentru orice $\xi \in H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$, problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times (0,\pi) \\ u(t,0) = u(t,\pi) & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(0,x) = \xi(x) & x \in (0,\pi) \end{cases}$$

are soluţie unică $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(0,\pi))$.

Demonstraţie: Definim operatorul A ca şi în aplicaţia 1 şi observăm că problema se traduce în mod echivalent prin

$$\begin{cases} u' = Au \\ u(0) = \xi \end{cases}.$$

Observăm că suntem în condiţiila Corolarului 2.1.2, şi această ultimă problemă Cauchy are soluţie unică dată de $u(t) = T(t)\xi$, unde $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este semigrupul generat de operatorul A. $\square$

Aplicaţia 3. ([15]) Această aplicaţie prezintă utilizarea semigrupurilor în studierea ecuaţiei corzii vibrante izotropă[1], inextensibilă şi omogenă de lungime π fixată la capete

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times (0,\pi) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,\pi) \\ u_t(0,x) = v_0(x) & x \in (0,\pi) \end{cases}.$$

Această ecuaţie cu derivate parţiale poate fi rescrisă echivalent sub forma unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi (în raport cu t) în spaţiul $H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$

$$\begin{cases} u_t - v = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times (0,\pi) \\ v_t - u_{xx} = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times (0,\pi) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,\pi) \\ v(0,x) = v_0(x) & x \in (0,\pi) \end{cases}.$$

Interpretând funcţiile reale de două variabile $u, v : \mathbb{R}_+ \times (0,\pi) \to \mathbb{R}$ ca funcţii de o variabilă reală cu valori în $H_0^1(0,\pi)$ şi respectiv în $L^2(0,\pi)$ ($u(t,x) = u(t)(x)$ şi $v(t,x) = v(t)(x)$ pentru $x \in (0,\pi)$), observăm că acest sistem, la rândul său, poate fi văzut ca o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi de forma

$$\begin{cases} z' = Az \\ z(0) = \xi \end{cases}, \qquad (\star)$$

unde $z(t) = (u(t), v(t))$ pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$, $\xi = (u_0, v_0)$, iar A este operatorul definit prin

$$A : D(A) \subset H_0^1(0.\pi) \times L^2(0,\pi) \to H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi),$$

prin

$$\begin{cases} D(A) = H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi) \times H_0^1(0,\pi) \\ A(u,v) = (v, u'') \text{ pentru } (u,v) \in D(A) \end{cases}.$$

[1]izotrop: posedă aceleaşi proprietăţi fizice în orice direcţie

Vom demonstra că A este generatorul unui $\mathcal{C}_0$-semigrup definit pe $X = H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$. Înzestrăm acest spaţiu cu produsul scalar

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle = \int_0^\pi u_1'(x) u_2'(x) \mathrm{d}x + \int_0^\pi v_1(x) v_2(x) \mathrm{d}x,$$

pentru orice $(u_i, v_i) \in H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi),\ i = 1, 2$. X înzestrat cu acest produs scalar este un spaţiu Hilbert real. Din nou, faptul că $D(A)$ este dens în X rezultă din definiţia spaţiilor $H_0^1(0,\pi)$ şi $H^2(0,\pi)$ (vezi [3]).

Fie $\lambda > 0$. Vom demonstra că $\lambda I - A$ este inversabil. Pentru aceasta observăm că pentru orice $(f, g) \in H_0^1(0.\pi) \times L^2(0,\pi)$, ecuaţia $(\lambda I - A)(u, v) = (f, g)$ se scrie echivalent sub forma

$$\begin{cases} \lambda u - v = f \\ \lambda v - u'' = g \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} . \qquad (S)$$

Înmulţind prima ecuaţie cu λ şi adunând-o la cea de-a două obţinem

$$\begin{cases} \lambda^2 u - u'' = \lambda f + g \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} .$$

Analog ca şi la prima aplicaţie se constată că pentru orice $(f, g) \in H_0^1(0.\pi) \times L^2(0,\pi)$, această problemă are o soluţie unică $u \in H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0.\pi)$. Revenind la prima ecuaţie din sistemul (S) îl putem determina în mod unic şi pe $v \in H_0^1(0,\pi)$. Astfel, pentru orice $\lambda > 0$ $(\lambda I - A)^{-1}$ este bine definit.

Din (S) deducem că $(\lambda u - v, \lambda v - u'') = (f, g)$. Înmulţind scalar în $H_0^1(0,\pi) \times L^2(0.\pi)$ ambii membri ai egalităţii de mai sus cu (u, v) obţinem

$$\langle (\lambda u - v, \lambda v - u''), (u, v) \rangle = \langle (f, g), (u, v) \rangle.$$

Folosind linearitatea produsului scalar obţinem relaţia echivalentă

$$\lambda \|(u, v)\|_X^2 - \langle (v, u''), (u, v) \rangle = \langle (f, g), (u, v) \rangle.$$

În calculele ce urmează, integrând prin părţi putem vedea cum unul dintre termenii expresiei de mai sus este nul, şi anume

$$\begin{aligned} \langle (v, u''), (u, v) \rangle &= \int_0^\pi u'(x) v'(x) \mathrm{d}x + \int_0^\pi u''(x) v(x) \mathrm{d}x = \\ &= v(x) u''(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi u''(x) v(x) \mathrm{d}x + \int_0^\pi u''(x) v(x) \mathrm{d}x = \\ &= 0, \end{aligned}$$

deoarece $v(0) = v(\pi) = 0$.

Astfel, folosind inegalitatea Caucly-Schwarz obţinem

$$\begin{aligned}\lambda\|(\lambda I-A)^{-1}(f,g)\|_X^2 &= \langle (f,g),(\lambda I-A)^{-1}(f,g)\rangle_X \leq \\ &\leq \|(f,g)\|_X\|(\lambda I-A)^{-1}(f,g)\|_X.\end{aligned}$$

Simplificând cu $\|(\lambda I-A)^{-1}(f,g)\|_X$ pe care îl presupunem nenul (cazul în care acesta este egal cu 0 fiind trivial), obţinem

$$\|(\lambda I-A)^{-1}(f,g)\|_X \leq \frac{1}{\lambda}\|(f,g)\|_X,\ \forall (f,g)\in X.$$

În concluzie $\|R(\lambda;A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ pentru orice $\lambda > 0$. La fel ca şi la aplicaţia 1 rezultă că operatorul A este închis, şi prin urmare sunt verificate condiţiile Teoremei Hille-Yosida pentru $M=1$ şi $\omega=0$. Astfel A este generatorul unui $\mathcal{C}_0$-semigrup şi din corolarul 2.1.2 rezultă că sistemul $(\star)$ şi prin urmare ecuaţia iniţială cu derivate parţiale are soluţie unică dată de formula $z(t)=T(t)\xi$. $\square$

Capitolul 3

Stabilitate Exponenţială pentru $\mathcal{C}_0$-Semigrupuri

3.1 Definirea conceptelor şi proprietăţi imediate

Definiţia 3.1.1. Fie $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$ semigrup. Spunem că acest semigrup este *exponenţial stabil* dacă există $N, \mu > 0$ cu proprietatea că $\|T(t)\| \leq Ne^{-\mu t}$, oricare ar fi $t \geq 0$.

Semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ se numeşte *asimptotic stabil* dacă $\lim\limits_{n\to\infty} T(t) = 0$, oricare ar fi $x \in X$.

Semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ se numeşte *stabil* dacă există $N > 0$ astfel încât $\|T(t)\| \leq N$, oricare ar fi $t \geq 0$.

O caracterizare utilă a stabilităţii exponenţiale este dată în următoarea teoremă.

Teorema 3.1.1. *$\mathcal{C}_0$-semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil dacă şi numai dacă există $t_0 > 0$ astfel încât $\|T(t_0)\| < 1$.*

Demonstraţie: Dacă $\mathcal{C}_0$-semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil, atunci există $N, \mu > 0$ astfel încât $\|T(t)\| \leq Ne^{-\mu t}$. Pentru $t \to \infty$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \|T(t)\| = 0$, adică există un t_0 cu $\|T(t_0)\| < 1$.

Reciproc, notăm cu $\rho = \|T(t_0)\|$ şi considerăm $t \geq 0$. Dacă $n \left\lfloor \dfrac{t}{t_0} \right\rfloor$, avem $nt_0 \leq t < (n+1)t_0$. Prin urmare

$$\|T(t)\| = \|T(t - nt_0)T(t_0)^n\| \leq \|T(t - nt_0)\|\|T(t_0)\|^n \leq Me^{\omega(t-nt_0)}\rho^n \leq Me^{\omega t_0}\rho^n,$$

cu M, ω din teorema de creştere exponenţială cu ω considerat pozitiv. Fie $\mu = -\dfrac{1}{t_0} \ln \rho >$

0. Atunci $\rho^{\frac{1}{t_0}} = e^{-\mu}$. Astfel avem

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t_0}e^{-\mu n t_0} = Me^{\omega t_0}e^{\mu t_0}e^{-\mu(n+1)t_0} \leq Me^{\omega t_0}\frac{1}{\rho}e^{-\mu t} = Ne^{-\mu t},$$

unde $N = Me^{\omega t_0}\frac{1}{\rho}$ şi $\rho = -\frac{1}{t_0}\ln \|T(t_0)\|$. Astfel $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil. □

Enunţul teoremei 3.1.1 poate fi reformulat în forma: *Dacă există $t_0 > 0$ astfel încât $\|T(t_0)x\| \leq c\|x\|$ cu $c \in (0,1)$ fixat, pentru orice $x \in X$, atunci $\mathcal{C}_0$ semigrupul este exponenţial stabil.* Teorema următoare o generalizează pe prima în sensul că t_0 nu trebuie să fie acelaşi pentru orice $x \in X$.

Teorema 3.1.2. *Semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil dacă şi numai dacă există $c \in (0,1)$ şi $h > 0$ astfel încât pentru orice $x \in X$ există $t_x \in (0,h]$ cu $\|T(t_x)x\| \leq c\|x\|$.*

Demonstraţie: Necesitatea este evidentă atât din definiţia stabilităţii exponenţiale cât şi din teorema precedentă.

Pentru suficienţă, considerăm $x \in X \setminus \{0\}$ şi notăm $t_1 = t_x \in (0,h]$ cu $\|T(t_1)x\| \leq c\|x\|$. Acum, considerăm $t_2 = t_y \in (0,h]$, unde $t = T(t_1)x$, şi obţinem $\|T(t_1+t_2)x\| \leq c^2\|x\|$. Procedând inductiv deducem că există $t_n \in (0,h]$ cu

$$\|T(t_1 + ... + t_n)\| \leq c^n\|x\|, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Punem $t_0 = 0$ şi notăm $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$.

Dacă $\sigma_n \to \infty$ atunci pentru $t \geq 0$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}$. Astfel $\|T(t)x\| = \|T(t-\sigma_n)T(\sigma_n)x\| \leq Me^{\omega h}c^n\|x\|$. Luăm $\mu = -\frac{1}{h}\ln c > 0$ care din inegalitatea precedentă ne arată că

$$\|T(t)x\| \leq Me^{\omega h}e^{-\mu n h}\|x\| = \frac{Me^{\omega h}}{c}e^{-\mu(n+1)h}\|x\| \leq \frac{Me^{\omega h}}{c}e^{-\mu t}\|x\|,$$

pentru că $\sigma_{n+1} \leq (n+1)h$. Astfel există $N = \frac{Me^{\omega h}}{c}$ şi $\mu = -\frac{1}{h}\ln c$ astfel încât

$$\|T(t)x\| \leq Ne^{-\mu t}\|x\|, \ \forall t \geq 0.$$

În cazul în care $\sigma_n \to s_0 \in \mathbb{R}_+^*$, din $\|T(\sigma_n)x\| \leq c^n\|x\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ obţinem pentru $n \to \infty$ că $T(s_0)x = 0$, iar din proprietatea de semigrup, pentru orice $t \geq s_0$ avem $T(t)x = T(t-s_0)T(s_0)x = 0$.

Dacă $t \in [0, s_0)$ atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}$. Urmând un calcul analog ca şi la cazul precedent, obţinem din nou

$$\|T(t)x\| \leq Ne^{-\mu t}\|x\|, \ \forall t \in [0, s_0).$$

Cum pentru $t \leq s_0$ avem $\|T(t)x\| = 0$, demonstraţia este încheiată. □

3.2 Teoreme de Stabilitate de tip Datko

Teorema 3.2.1. *$\mathcal{C}_0$ semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil dacă şi numai dacă există $p \geq 1$ astfel încât*
$$\int_0^\infty \|T(t)\|^p \mathrm{d}t < \infty, \ \forall x \in X.$$

Demonstraţie: Penru necesitate, calculăm
$$\int_0^\infty \|T(t)\|^p \mathrm{d}t \leq \int_0^\infty N^p e^{-\mu p t}\|x\|^p \mathrm{d}t = N^p\|x\|^p \int_0^\infty e^{-\mu p t}\mathrm{d}t =$$
$$= N^p\|x\|^p \left(-\frac{1}{\mu p} e^{-\mu p t}\Big|_0^\infty\right) = \frac{N^p}{\mu p}\|x\|^p < \infty.$$

Pentru suficienţă vom demonstra mai întâi că operatorul definit prin
$$\mathcal{U} : X \to L^p(\mathbb{R}_+, X), \ \mathcal{U}(x) = T(\cdot)x, \ \mathcal{U}(x) : \mathbb{R} \to X, \ \mathcal{U}(x)(t) = T(t)x$$
este mărginit. Pentru aceasta, vom folosi Principiul Graficului Închis. Considerăm $x_n \to x$ şi $\mathcal{U}(x_n) \to g$ în L^p şi vrem să demonstrăm că $\mathcal{U}(x) = g$.

Dacă $x_n \to x$ atunci $T(t)x_n \to T(t)x$, oricare ar fi $t \geq 0$, şi astfel şirul $(\mathcal{U}(x_n))$ este convergent simplu pe $\mathbb{R}_+$ la funcţia $\mathcal{U}(x)$. Ştim, însă că $\mathcal{U}(x_n) \to g$ în L^p, de unde deducem că există un subşir $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ astfel încât $\mathcal{U}(x_{n_k}) \to g$ a.p.t. Astfel deducem că $\mathcal{U}(x) = g$ a.p.t, adică $\mathcal{U}(x) = g$ în L^p. Astfel operatorul $\mathcal{U}$ este închis, şi din Principiul Graficului Închis, $\mathcal{U}$ este un operator mărginit.

Astfel există $k > 0$ cu proprietatea $\|\mathcal{U}(x)\|_p \leq k\|x\|$, ceea ce este echivalent cu
$$\left(\int_0^\infty \|T(t)\|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} < k\|x\|, \ \text{pentru orice } x \in X.$$

Presupunem că semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ nu este exponenţial stabil, ceea ce din Teorema 3.1.2 înseamnă că pentru orice $c \in (0, 1)$ şi pentru orice $h > 0$, există $x \in X$ cu $\|x\| = 1$ astfel încât oricare ar fi $\tau \in (0, h]$ să avem $\|T(\tau)x\| > c$. Ridicăm la puterea p ultima inegalitate şi o integrăm de la 0 la h:
$$c^p h < \int_0^h \|T(\tau)x\|^p \mathrm{d}\tau \leq \int_0^\infty \|T(\tau)x\|^p \mathrm{d}\tau \leq k^p,$$
unde ultima inegalitate a fost obţinută din proprietatea de mărginire a operatorului $\mathcal{U}$. Deoarece inegalitatea obţinută este valabilă pentru orice $h > 0$, iar $k > 0$ este fixat, am ajuns la o contradicţie.

Prin urmare $\mathcal{C}_0$-semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil. $\square$

Propoziţia 3.2.1. *Semigrupul* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *este exponenţial stabil dacă şi numai dacă există* $p \geq 1$ *cu* $\sum_{n=0}^{\infty} \|T(n)x\|^p < \infty$*, pentru orice* $x \in X$.

Demonstraţie: Dacă $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil, atunci există $N, \nu > 0$ astfel încât $\|T(t)\| \leq Ne^{-\nu t}$. Astfel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T(n)x\|^p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(Ne^{-\nu n}\right)^p = N^p \frac{1}{1 - e^{-\nu p}} < \infty.$$

Pentru suficienţă, să luăm un $t \geq 0$ şi $n = \lfloor t \rfloor$. Atunci $\|T(t)x\| \leq \sup_{s\in[0,1]}(Me^{\omega s})\|T(n)x\|$ şi astfel, notând $\sup_{s\in[0,1]}(Me^{\omega s}) = S$ avem

$$\int_n^{n+1} \|T(t)x\|^p \mathrm{d}t \leq S^p \|T(n)x\|^p,$$

ceea ce implică

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \|T(t)x\|^p \leq S^p \sum_{n=0}^{\infty} \|T(n)x\|^p, \forall x \in X.$$

Din teorema 3.2.1 obţinem că $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil. □

Putem acum să dăm un exemplu care ne arată că conceptele de asimptotic stabilitate şi exponenţial stabilitate sunt distincte în general. Exemplul pe care îl vom da se datorează lui Datko.

Exemplul 3.2.1. Fie $X = \ell^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$ şi operatorul $T(t) : X \to X$ dat prin $T(t)x = \left(e^{-t/n} x_n\right)$. Atunci $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este semigrup asimptotic stabil care nu este exponenţial stabil.

Demonstraţie: Avem $|e^{-t/n}x_n| = e^{-t/n}|x_n| \leq |x_n|$, de unde prin criteriul comparaţiei deducem că $T(t)x \in \ell^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$.

Este evident că $T(t)$ este un operator liniar, şi mărginirea acestuia rezultă din consideraţiile anterioare în felul următor:

$$\|T(t)x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t/n}|x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1,$$

adică $\|T(t)\| \leq 1$ pentru orice $t \geq 0$.

Să verificăm acum proprietatea de $\mathcal{C}_0$-semigrup. Evident $T(0) = I$ şi

$$T(t)T(s) = \left(e^{-t/n}(e^{-s/n}x_n)\right) = \left(e^{-(s+t)/n}x_n\right) = T(s+t)x,$$

pentru orice $x \in X$ şi orice $s, t \geq 0$.

Calculând

$$\|T(t)x - x\|_1 = \|\left(e^{-t/n}x_n - x_n\right)\|_1 = \left\|\left(e^{-\frac{t}{n}} - 1\right)x_n\right\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{t}{n}} - 1\right)|x_n|.$$

Deoarece $\left(e^{-\frac{t}{n}}-1\right)|x_n| \leq |x_n|$ conform criteriului lui Weierstrass seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\frac{t}{n}}-1\right)|x_n|$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}_+$ şi astfel putem interschimba limitele cu suma seriei obţinând

$$\lim_{t\to 0_+}\|T(t)x-x\|_1 = \lim_{t\to 0_+}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\frac{t}{n}}-1\right)|x_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{t\to 0_+}\left(e^{-\frac{t}{n}}-1\right)|x_n| = 0,$$

de unde am obţinut că $\lim\limits_{t\to 0_+} T(t)x = x$, pentru orice $x \in X$.

Conform celor de mai sus $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este un $\mathcal{C}_0$-semigrup şi în plus $\|T(t)\| \leq 1$ pentru orice $t \geq 0$, adică semigrupul este de contracţii.

Pentru $x \in \ell^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$ avem $|e^{-t/n}x_n| \leq |x_n|$, de unde rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-t/n}x_n$ este uniform convergentă şi avem

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-t/n}x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{t\to\infty} e^{-t/n}x_n = 0,$$

şi astfel $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este asimptotic stabil.

Să presupunem acum că $\{T_t\}_{t\geq 0}$ ar fi şi exponenţial stabil. Atunci conform Teoremei 3.2.1 avem $\int_0^{\infty}\|T(t)x\|\mathrm{d}t > \infty$ pentru orice $x \in \ell^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$. Am văzut că seria $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-t/n}x_n$ este uniform şi absolut convergentă pe $\mathbb{R}_+$, ceea ce ne permite în cele ce urmează să interschimbăm integrala cu suma seriei.

$$\int_0^{\infty}\|T(t)x\|\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t/n}x_n\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\cdot n.$$

Dacă alegem $x = \left(\frac{1}{n^2}\right) \in \ell^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$, atunci ar trebui să avem

$$\int_0^{\infty}\|T(t)x\|\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} < \infty,$$

ceea ce este evident o contradicţie, deoarece seria armonică este divergentă. □

Definiţia 3.2.1. Semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ se numeşte *exponenţial instabil* dacă există $N, \nu > 0$ astfel încât $\|T(t)x\| \geq Ne^{\nu t}\|x\|$ pentru orice $t \geq 0$ şi orice $x \in X$.

Se poate observa imediat că pentru un semigrup exponenţial stabil fiecare operator este injectiv. Acest fapt, nu implică însă că operatorii sunt şi inversabili, după cum putem vedea în exemplul următor, care ne arată un $\mathcal{C}_0$-semigrup exponenţial instabil, ai cărui operatori nu sunt inversabili.

Exemplul 3.2.2. Fie $X = L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ şi $T(t) : X \to X$,

$$T(t)f(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s < t \\ f(s-t), & s \geq t \end{cases}$$

iar $S(t) = e^t T(t)$. Atunci $\{T_t\}_{t\geq 0}$ şi $\{S_t\}_{t\geq 0}$ sunt $\mathcal{C}_0$-semigrupuri, cu $\|T(t)f\|_1 = \|f\|_1$ şi $\|S(t)f\|_1 = e^t\|f\|_1$ pentru orice $t \geq 0$ şi pentru orice $x \in X$, iar $\{S_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial instabil $S(t)$ nu e inversabil pentru nici un $t > 0$.

Demonstraţie: Evident că $\{T_t\}_{t\geq 0}$ verifică proprietăţile unui semigrup. Să demonstrăm acum că $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este un $\mathcal{C}_0$-semigrup. Avem

$$\|T(t)f\|_1 = \int_t^\infty |f(s-t)|\mathrm{d}s = \int_0^\infty |f(t)|\mathrm{d}t = \|f\|_1, \ \forall t \geq 0.$$

Din proprietatea de densitate a spaţiului funcţiilor continue cu suport compact în $L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ deducem că pentru $f \in X$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există g continuă pe $\mathbb{R}_+$ cu $\operatorname{Supp} g \subset [0, b]$ astfel încât $\|f - g\|_1 < \varepsilon/4$. De aici rezultă că g este uniform continuă pe $[0, b+1]$ şi astfel există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $u, v \in [0, b+1]$ cu $|u - v| < \delta$ să avem $|g(u) - g(v)| < \dfrac{\varepsilon}{4(b+1)}$.

Mai departe avem

$$\begin{aligned} \|T(t)f - f\|_1 &\leq \|T(t)(f-g)\|_1 + \|g - f\|_1 + \|T(t)g - g\|_1 = \\ &= 2\|f - g\|_1 + \|T(t)g - g\|_1 < \varepsilon/2 + \|T(t)g - g\|_1 \end{aligned}$$

Acum să ne ocupăm de ultimul termen. Fie $t < \delta$ ales în definiţia uniform continuităţii lui g.

$$\begin{aligned} \|T(t)g - g\|_1 &= \int_0^t |g(s)|\mathrm{d}s + \int_t^\infty |g(s-t) - g(s)|\mathrm{d}s = \\ &= \int_0^t |g(s)|\mathrm{d}s + \int_0^\infty |g(s) - g(s+t)|\mathrm{d}s = \\ &= \int_0^t |g(s)|\mathrm{d}s + \int_0^{b+1} |g(s+t) - g(s)|\mathrm{d}s < \\ &< \int_0^t |g(s)|\mathrm{d}s + (b+1)\frac{\varepsilon}{4(b+1)} = \int_0^t |g(s)|\mathrm{d}s + \varepsilon/4 \end{aligned}$$

În mod evident $\lim\limits_{t\to 0_+} \displaystyle\int_0^t |g(s)|\mathrm{d}s = 0$, de unde rezultă că există $\delta_1 > 0$ astfel încât $\displaystyle\int_0^t \mathrm{d}s < \varepsilon/4$ pentru orice $t \in [0, \delta_1)$. Alegând acum $\delta_0 = \min\{\delta, \delta_1\}$ considerate mai sus, rezultă că

$$\|T(t)f - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

pentru orice $t \in [0, \delta_0)$. Prin urmare există $\lim_{t \to 0_+} T(t)f = f$, pentru orice $f \in X$, şi astfel $\{T_t\}_{t \geq 0}$ este un $\mathcal{C}_0$-semigrup.

De aici rezultă imediat că şi $\{S_t\}_{t \geq 0}$ este deasemenea un $\mathcal{C}_0$ semigrup, şi relaţia $\|S(t)f\|_1 = e^t \|T(t)\|_1 = e^t \|f\|_1$ pentru orice $t \geq 0$ ne asigură că $\{S_t\}_{t \geq 0}$ este exponenţial instabil.

Dacă ar exista $t_0 > 0$ cu $S(t_0)$ surjectiv, atunci $S(t_0)$ este inversabil şi din Propoziţia 1.2.5 rezultă că $S(t)$ este inversabil pentru orice $t \geq 0$. Deci $S(1)$ este surjectiv, şi dacă considerăm

$$h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

atunci $h \in X$ şi $S(1)f \neq h$ oricare ar fi $f \in X$, deoarece $S(1)$ duce orice funcţie $f \in X$ într-o altă funcţie care se anulează pe $[0, 1)$. Această contradicţie ne arată că $S(t)$ nu este inversabil pentru nici un $t > 0$. $\square$

Analogul teoremei 3.1.1 pentru instabilitate este dat de în continuare

Propoziţia 3.2.2. *$\mathcal{C}_0$-semigrupul $\{T_t\}_{t \geq 0}$ este exponenţial instabil dacă şi numai dacă există $t_0 > 0$ şi există $c > 1$ astfel încât $\|T(t_0)x\| \geq c\|x\|$, pentru orice $x \in X$.*

Demonstraţie: Pentru necesitate, ştim că există $N, \nu > 0$ astfel încât $\|T(t)x\| \geq Ne^{\nu t}\|x\|$, pentru orice $x \in X$. Pentru un t suficient de mare $Ne^{\nu t} > 1$, şi am terminat.

Pentru suficienţă considerăm $t \geq 0$ şi $n = \left\lfloor \frac{t}{t_0} \right\rfloor$, echivalent cu $nt_0 \leq t < (n+1)t_0$. Mai departe deducem că

$$\|T((n+1)t_0)x\| = \|T((n+1)t_0 - t)T(t)x\| \leq S\|T(t)x\|,$$

unde $S = \sup_{s \in [0, t_0]} Me^{\omega s}$ cu ω, M din proprietatea de creştere exponenţială a $\mathcal{C}_0$-semigrupului $\{T_t\}_{t \geq 0}$. Astfel obţinem

$$c^{n+1}\|x\| \leq S\|T(t)x\|,\ \forall x \in X,\ \forall t \geq 0.$$

Definind $\nu = \frac{1}{t_0} \ln c > 0$ obţinem $c = e^{\nu t_0}$ şi

$$e^{\nu(n+1)t_0}\|x\| \leq Me^{\omega t_0}\|T(t)x\|,\ \forall x \in X,\ \forall t \geq 0,$$

ceea ce implică

$$\frac{1}{S} e^{\nu t}\|x\| \leq \|T(t)x\|,\ \forall x \in X,\ \forall t \geq 0,$$

de unde rezultă că semigrupul este exponenţial instabil. $\square$

Există, deasemenea şi un analog al Propoziţiei 3.1.2, prezentat în continuare.

Propoziţia 3.2.3. *$\mathcal{C}_0$-semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial instabil dacă şi numai dacă există $c > 1$ şi $h > 0$ cu proprietatea că pentru orice $x \in X$ există $t_x \in\in (0, h]$ cu $\|T(t_x)x\| \geq c\|x\|$.*

Demonstraţie: Necesitatea rezultă imediat din propoziţia precedentă. Repetând raţionamentul din Teorema 3.1.2 înlocuind semnul $\leq$ cu $\geq$ obţinem existenţa unui şir $(t_n) \subset (0, h]$ cu

$$T(t_1 + t_2 + ... + t_n)x\| \geq c^n\|x\|, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Punem $t_0 = 0$ şi notăm cu $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} t_k$ observăm că $\|T(\sigma_n)x \geq c^n\|x\|, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Cum $c > 1$ deducem că $\sigma_n \to \infty$, pentru că altfel ar rezulta că există un $t = \lim_{n\to\infty} \sigma_n > 0$ cu $\|T(t)\| = \infty$, ceea ce este o contradicţie.

Astfel, pentru orice $t \geq 0$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}$, şi alegând ν astfel încât $c = e^{\nu h}$ obţinem

$$\begin{aligned} e^{\nu t}\|x\| \leq e^{\nu(n+1)h}\|x\| = c^{n+1}\|x\| \leq \|T(\sigma_{n+1})x\| \leq \\ \leq \|T(\sigma_{n+1} - t)\|\|T(t)x\| \leq S\|T(t)x\|, \end{aligned}$$

unde $S = \sup\limits_{s\in[0,h]} (Me^{\omega s})$ unde M, ω sunt alese din proprietatea de creştere exponenţială a $\mathcal{C}_0$-semigrupului $\{T_t\}_{t\geq 0}$. □

Mai departe, vom prezenta şi analogul teoremei lui Datko-Pazy pentru instabilitate.

Propoziţia 3.2.4. *Fie $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semigrup de operatori injectivi. Semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial instabil dacă şi numai dacă există $p \in (0, \infty)$ şi există $k > 0$ cu proprietatea*

$$\left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\tau}{\|T(\tau)x\|^p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{k}{\|x\|},$$

pentru orice $x \in X$, $x \neq 0$.

Demonstraţie: Necesitatea rezultă imediat din definiţia instabilităţii exponenţiale.

Pentru suficienţă, fie $x \in X, \ x \neq 0, t \geq 0$ şi $\tau \in [t, t+1]$. Atunci $\|T(\tau)x\| \leq S\|T(t)x\|$, unde $S = \sup\limits_{t\in[0,1]} Me^{\omega t}$, unde M, ω sunt cele din proprietatea de creştere exponenţială. De aici deducem că

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|T(t)x\|^p} \leq S^p \int_t^{t+1} \frac{1}{\|T(\tau)x\|^p}\mathrm{d}\tau \leq \\ \leq S^p \int_0^\infty \frac{1}{\|T(\tau)x\|^p}\mathrm{d}\tau \leq \frac{k^p S^p}{\|x\|^p}. \end{aligned}$$

De aici deducem $\|T(t)x\| \geq \dfrac{1}{kS}\|x\|,\ \forall t \geq 0,\ \forall x \in X$. Fie $t \geq 0$ şi $\tau \in [0,t]$. Atunci, pentru $x \neq 0$ avem

$$\|T(t)x\| = \|T(t-\tau)T(\tau)x\| \geq \frac{1}{kS}\|T(\tau)x\|,$$

ceea ce implică $\dfrac{1}{\|T(t)x\|} \leq kS\dfrac{1}{\|T(\tau)x\|},\ \forall \tau \in [0,t]$. Ridicăm la puterea p şi integrăm această ultimă relaţie de la 0 la t.

$$\begin{aligned}\frac{t}{\|T(t)x\|^p} &\leq k^pS^p\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{\|T(\tau)x\|^p} \leq \\ &\leq k^pS^p\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\tau}{\|T(\tau)x\|^p} \leq k^pS^p\frac{k^p}{\|x\|^p}.\end{aligned}$$

De aici se obţine $\|T(t)x\| \geq \frac{t^{\frac{1}{p}}}{k^2S}\|x\|,\ \forall t \geq 0,\ \forall x \in X$. Pentru că $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^{\frac{1}{p}}}{k^2S} = \infty$, există un $t_0 > 0$ astfel încât $c = \dfrac{t_0^{\frac{1}{p}}}{k^2S} > 1$. Aplicând propoziţia 3.2.2 rezultă că $\mathcal{C}_0$-semigrupul nostru este exponenţial instabil, ceea ce doream să demonstrăm. $\square$

În continuare, vom prezenta un rezultat al lui Rolewicz si Littman, care generalizează Teorema Datko-Pazy pentru stabilitatea unui $\mathcal{C}_0$-semigrup.

Teorema 3.2.2. *Fie $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semigrup pentru care există $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ crescătoare, cu $\varphi(0) = 0$ şi $\varphi(t) > 0$ pentru $t > 0$, astfel încât $\displaystyle\int_0^\infty \phi(\|T(t)x\|)\mathrm{d}t < \infty$ pentru orice $x \in X$.*

Atunci $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil.

Demonstraţie: Fie $x \in X$ şi $t \geq 0$. Atunci, din proprietatea de creştere exponenţială a semigrupului $\{T_t\}_{t\geq 0}$ rezultă că există $S = \sup\limits_{s\in[0,1]} Me^{\omega s}$ astfel încât

$$\|T(t+1)x\| \leq S\|T(\tau)x\|,\ \forall \tau \in [t, t+1],$$

ceea ce implică

$$\begin{aligned}\varphi(\|T(t+1)x\|) &\leq \int_t^{t+1} \varphi(S\|T(\tau)x\|)\mathrm{d}\tau = \\ &= \int_0^{t+1} \varphi(\|T(\tau)Sx\|)\mathrm{d}\tau - \int_0^t \varphi(\|T(\tau)Sx\|)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Pentru $t \to \infty$, din relaţia precedentă deducem că $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(\|T(t+1)x\|) = 0$, ceea ce implică $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(\|T(n)x\|) = 0$ pentru orice $x \in X$. Din proprietăţile lui φ rezultă că trebuie să avem $\lim\limits_{n\to\infty}\|T(n)x\| = 0$, pentru orice $x \in X$. Astfel deducem că pentru orice x există

$L_x > 0$ astfel încât $\|T(n)x\| \leq L_x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Aplicând Principiul Mărginirii Uniforme rezultă că există $K > 0$ astfel încât $\|T(n)\| \leq K$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Pentru $t \geq 0$ şi $n = \lfloor t \rfloor$ avem

$$\|T(t)\| \leq \|T(t-n)\|\|T(n)\| \leq SK =: L.$$

În continuare notăm cu

$$\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ \Phi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

şi observăm că funcţia Φ este continuă, $\Phi(0) = 0$, Φ este strict crescătoare cu $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$, ceea ce arată că funcţia Φ este bijectivă. Următorul calcul ne arată că funcţia Φ este deasemenea convexă. Pentru $0 \leq t_1 < t_2$ avem

$$\begin{aligned}
&\frac{\Phi(t_1) + \Phi(t_2)}{2} - \Phi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_{\frac{t_1+t_2}{2}}^{t_2} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{\frac{t_1+t_2}{2}} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = \\
=&\frac{1}{2}\int_0^{\frac{t_2-t_1}{2}} \varphi\left(s + \frac{t_1+t_2}{2}\right)\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^{t_2-t_1} 2\varphi(s+t_1)\mathrm{d}s = \\
=&\frac{1}{2}\int_0^{\frac{t_2-t_1}{2}} \left[\phi\left(s + \frac{t_1+t_2}{2}\right) - \phi(s+t_1)\right]\mathrm{d}s \geq 0,
\end{aligned}$$

deoarece $\dfrac{t_1+t_2}{2} > t_1$ şi φ este crescătoare. Convexitatea lui Φ rezultă din faptul că Φ este continuă şi convexă Jensen, conform calculului de mai sus.

Deoarece φ este crescătoare, dacă $\tau \leq t$ rezultă că $\varphi(\tau) \leq \varphi(t)$, ceea ce implică

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau \leq t\varphi(t),\ \forall t \geq 0.$$

Astfel obţinem

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \Phi(\|T(t)x\|)\mathrm{d}t &\leq \int_0^\infty \|T(t)x\|\varphi(\|T(t)x\|)\mathrm{d}t \leq \\
&\leq L\|x\| \int_0^\infty \varphi(\|T(t)x\|)\mathrm{d}t < \infty.
\end{aligned}$$

Mai departe, pentru $m \in \mathbb{N}^*$ notăm

$$F_m = \left\{x \in X : \int_0^\infty \Phi(\|T(t)x\|)\mathrm{d}t \leq m\right\}$$

şi observăm că $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m = X$, iar F_m sunt mulţimi convexe pentru fiecare $m \in \mathbb{N}^*$. Să demonstrăm acum că aceste mulţimi sunt şi închise. Pentru aceasta, fie $x \in X$ pentru care există un şir (x_n) cu proprietatea că $x_n \to x$. Din continuitatea funcţiei Φ deducem că

$$\Phi(\|T(t)x_k\|) \to \Phi(\|T(t)x\|),$$

pentru $k \to \infty$, şi prin aplicarea Teoremei lui Fatou obţinem

$$\int_0^\infty \Phi(\|T(t)x\|)\mathrm{d}t \le \liminf_{k\to\infty}]int_0^\infty \Phi(\|T(t)x_k\|)\mathrm{d}t,$$

ceea ce arata că $x \in F_m$, fapt ce demonstrează că F_m este o mulţime închisă.

Conform Teoremei lui Baire, deoarece X este scris ca o reuniune numărabilă de mulţimi închise, rezultă că cel puţin una dintre aceste mulţimi are interiorul nevid. Prin urmare există $m_0 \in \mathbb{N}$, există $x_0 \in F_{m_0}$ pentru care putem găsi un $\delta > 0$ astfel încât $\{x \in X : \|x - x_0\| < \delta\} \subset F_{m_0}$. Fie acum $x \in X$ cu $\|x\| < \delta$. Notăm cu $x' = x + x_0$ şi $x'' = x - x_0$. Atunci x' şi $-x''$ sunt în F_{m_0}, iar din definiţia mulţimilor F_n deducem că $x', x'' \in F_{m_0}$. Deoarece F_{m_0} este mulţime convexă deducem că $\dfrac{x' + x''}{2} = x \in F_{m_0}$. Prin urmare, pentru orice $x \in X$ cu $\|x\| < \delta$ vom avea

$$\int_0^\infty \Phi(\|T(t)x\|)\mathrm{d}t \le m_0.$$

Considerăm acum $x \in X$ cu $L\|x\| < \delta$ şi $t > 0$. Atunci avem

$$\|T(t)x\| \le \|T(t-\tau)\|\|T(\tau)x\| \le L\|T(\tau)x\|, \ \forall \tau \in [0,t].$$

Integrând această relaţie pe intervalul $[0,t]$ după ce i-am aplicat funcţia Φ, care este crescătoare, obţinem

$$t\Phi(\|T(t)x\|) \le \int_0^t \Phi(L\|T(\tau)x\|)\mathrm{d}\tau \le \int_0^\infty \Phi(\|T(\tau)Lx\|)\mathrm{d}\tau \le m_0,$$

ceea ce implică

$$\Phi(\|T(t)x\|) \le \frac{m_0}{t}, \ \forall t > 0, \ \forall x \in X \text{ cu } \|x\| < \frac{\delta}{L},$$

de unde, aplicând inversa funcţiei Φ avem

$$\|T(t)x\| \le \Phi^{-1}\left(\frac{m_0}{t}\right), \ \forall t > 0, \ \forall x \in X \text{ cu } \|x\| < \frac{\delta}{L}.$$

Fie $y \in X \setminus \{0\}$ şi notăm $x = \dfrac{\delta}{2L\|y\|}y$. Atunci $\|x\| < \dfrac{\delta}{L}$, ceea ce implică

$$\|T(t)x\| = \frac{\delta}{2L\|y\|}\|T(t)y\| \le \Phi^{-1}\left(\frac{m_0}{t}\right),$$

de unde deducem că

$$\|T(t)y\| \le \frac{2L}{\delta}\Phi^{-1}\left(\frac{m_0}{t}\right), \ \forall y \in X.$$

Ultima relaţie ne arată că

$$\|T(t)\| \leq \frac{2L}{\delta}\Phi^{-1}\left(\frac{m_0}{t}\right), \ \forall t > 0.$$

Folosind continuitatea funcţiei Φ şi faptul că $\Phi(0) = 0$ obţinem că $\lim_{t\to\infty} \Phi^{-1}\left(\frac{m_0}{t}\right) = 0$, ceea ce dovedeşte existenţa unui $t_0 > 0$ cu proprietatea că $\|T(t_0)\| < 1$.Conform Teoremei 3.1.1, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil. □

Remarca 3.2.1. Dacă în teorema precedentă se alege $\varphi(t) = t^p$ cu $p \geq 1$, atunci obţinem Teorema Datko-Pazy.

În continuare vom prezenta alte două generalizări ale Teoremei lui Datko-Pazy. Una ar fi extinderea domeniului în care poate fi ales exponentul p de la $[1, \infty)$ la $(0, \infty)$ iar a doua ar fi lărgirea condiţiei de existenţă a unui p care să fie valabil pentru orice x. Deoarece în fiecare caz necesitatea este o simplă verificare, vom enunţa numai partea netrivială a teoremelor.

Teorema 3.2.3. *$\mathcal{C}_0$-semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ pentru care are există un $p > 0$ astfel încât $\int_0^\infty \|T(\tau)x\|^p \mathrm{d}\tau < \infty, \ \forall x \in X$ este exponenţial stabil.*

Demonstraţie: O demonstraţie se poate da folosind Teorema 3.2.2. În continuare, însă, vom prezenta o demonstraţie directă a acestul fapt.

Fie $t \geq 1$ şi $\tau \in [t-1, t]$. Notăm cu $S = \sup_{s\in[0,1]} Me^{\omega s}$, unde M, ω sunt din proprietatea de creştere exponenţială. Astfel deducem că

$$\|T(t)x\| = \|T(t-\tau)T(\tau)x\| \leq S\|T(\tau)x\|.$$

Ridicând la puterea p şi integrând de la $t-1$ la t obţinem

$$\|T(t)x\|^p \leq S^p \int_{t-1}^t \|T(\tau)x\|^p \mathrm{d}\tau \leq$$
$$S^p \int_0^\infty \|T(\tau)x\|^p \mathrm{d}\tau = k_x.$$

Astfel am obţinut că $\|T(t)x\| \leq k_x^{\frac{1}{p}}, \ \forall x \in X$. Din Principiul Mărginirii uniforme deducem că există $k > 0$ astfel încât $\|T(t)\| \leq k, \ \forall t \geq 1$. Notând cu $L = \max\{S, k\}$ obţinem că $\|T(t)\| \leq L, \ \forall t \geq 0$.

Fie acum $t \geq 0$ şi $\tau \in [0, t]$. Atunci

$$\|T(t)x\| = \|T(t-\tau)T(\tau)x\| \leq L\|T(\tau)x\|.$$

Ridicând la puterea p şi integrând pe intervalul $[0,t]$ obţinem

$$t\|T(t)x\|^p \leq L^p \int_0^t \|T(\tau)x\|^p \mathrm{d}\tau \leq L^p \int_0^\infty \|T(\tau)x\|^p \mathrm{d}\tau \leq$$
$$\leq L^p k'_x,$$

unde $k'_x = \displaystyle\int_0^\infty \|T(\tau)x\| \mathrm{d}\tau$. Relaţia obţinută se scrie în mod echivalent sub forma

$$t^{\frac{1}{p}} \|T(t)x\| \leq L k_x'^{\frac{1}{p}},\ \forall t \geq 0,\ \forall x \in X.$$

Tot din Principiul Mărginirii Uniforme obţinem

$$t^{\frac{1}{p}} \|T(t)\| \leq L',\ \forall t \geq 0,$$

ceea ce e echivalent cu $\|T(t)\| \leq \dfrac{L'}{t^{\frac{1}{p}}}$, $\forall t > 0$. Pentru $t \to \infty$ rezultă că există un $t_0 > 0$ cu $\|T(t_0)\| < 1$, de unde, conform Teoeremei 3.1.1 $\mathcal{C}_0$-semigrupul nostru este exponenţial stabil. □

Teorema 3.2.4. *Fie $\mathcal{C}_0$-semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ cu proprietatea că pentru orice $x \in X$ există un $p_x > 0$ astfel încât $\displaystyle\int_0^\infty \|T(\tau)x\|^{p_x} \mathrm{d}\tau < \infty$. Atunci $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil.*

Demonstraţie: Fie $t \geq 1$ şi $\tau \in [t-1, t]$. Notăm cu $S = \sup\limits_{s\in[0,1]} Me^{\omega s}$, cu M, ω din creşterea exponenţială. Atunci, pentru $x \in X$ avem

$$\|T(t)x\| \leq \|T(t-\tau)\|\|T(\tau)x\| \leq S\|T(\tau)x\|.$$

Ridicând la puterea p_x şi integrând de la $t-1$ la t obţinem că

$$\|T(t)x\|^{p_x} \leq S^{p_x} \int_{t-1}^t \|T(\tau)x\|^{p_x} \mathrm{d}\tau \leq$$
$$\leq S \int_0^\infty \|T(\tau)x\|^{p_x} \mathrm{d}\tau = S^p k_x,$$

unde prin k_x am notat $\displaystyle\int_0^\infty \|T(\tau)x\|^{p_x} \mathrm{d}\tau$. Mai departe deducem că

$$\|T(t)x\| \leq S k_x^{\frac{1}{p_x}},\ \forall t \geq 1,\ \forall x \in X.$$

Din Principiul Mărginirii Uniforme rezultă că există $L' > 0$ astfel încât $\|T(t)\| \leq L'$, $\forall t \geq 1$. Astfel $\|T(t)x\| \leq L = \max\{1, S\}$, $\forall t \geq 0$.

Fie acum $t \geq 0$ şi $\tau \in [0, t]$. Pentru $x \in X$ avem

$$\|T(t)x\| \leq \|T(t-\tau)\|\|T(\tau)x\| \leq L\|T(\tau)x\|.$$

Ridicăm la puterea p_x şi integrăm pe intervalul $[0,t]$. Se obţine

$$t\|T(t)x\|^{p_x} \leq L^{p_x} \int_0^t \|T(\tau)x\|^{p_x} \mathrm{d}\tau \leq L^{p_x} k_x,$$

ceea ce se transcrie echivalent prin

$$t^{\frac{1}{p_x}} \|T(t)x\| \leq L k_x^{\frac{1}{p_x}}, \ \forall x \in X, \ \forall t \geq 0.$$

Adunând la relaţia precedentă relaţia $\|T(t)x\| \leq L\|x\|$ obţinem

$$\left(1 + t^{\frac{1}{p_x}}\right) \|T(t)x\| \leq L \left(\|x\| + k_x^{\frac{1}{p_x}} \right),$$

adică

$$\|T(t)x\| \leq L \frac{\|x\| + k_x^{\frac{1}{p_x}}}{1 + t^{\frac{1}{p_x}}}, \ \forall t \geq 0, \ \forall x \in X.$$

Ne vom ocupa acum de termenul care aparea în expresia mărginirii de mai sus.

$$L \frac{\|x\| + k_x^{\frac{1}{p_x}}}{1 + t^{\frac{1}{p_x}}} = L \frac{\|x\| + k_x^{\frac{1}{p_x}}}{\ln(2+t)} \frac{\ln(2+t)}{1 + t^{\frac{1}{p_x}}}.$$

Observăm că $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\ln(2+t)}{1 + t^{\frac{1}{p_x}}} = 0$, folosind eventual criteriul lui l'Hospital, de unde rezultă imediat că pentru fiecare $x \in X$ există un $N_x > 0$ astfel încât $\|T(t)x\| \leq \dfrac{N_x}{\ln(2+t)}$ pentru orice $x \in X$ şi $t \geq 0$. Aplicând din nou Principiul Mărginirii Uniforme deducem că există un $N > 0$ astfel încât

$$\|T(t)\| \leq \frac{N}{\ln(2+t)}, \ \forall t \geq 0.$$

De aici rezultă uşor prin trecere la limită pentru $t \to \infty$ că există un $t_0 > 0$ cu $\|T(t_0)\| < 1$, şi aplicând Teorema 3.1.1 obţinem că $\mathcal{C}_0$-semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil. $\square$

În continuare vom prezenta varianta discretă a Teoremei 3.2.2.

Propoziţia 3.2.5. *Fie $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semigrup pentru care există $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, crescătoare, cu $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$ oricare ar fi $t > 0$ astfel încât*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\|T(n)x\|) < \infty,$$

pentru orice $x \in X$. Atunci $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil.

Demonstraţie: Fie $t \geq 0$ şi $n = \lfloor t \rfloor$. Atunci notând cu $S = \sup\limits_{s\in[0,1]} Me^{\omega s}$ cu M, ω din proprietatea de creştere exponenţială, obţinem $\varphi(\|T(t)x\|) \leq \varphi(S\|T(n)x\|)$, de unde rezultă că

$$\int_n^{n+1} \varphi(\|T(t)x\|)\mathrm{d}t \leq \varphi(S\|T(n)x\|).$$

Prin însumare se obţine

$$\int_0^\infty \varphi(\|T(t)x\|)\mathrm{d}t \leq \sum_{n=0}^\infty \varphi(S\|T(n)x\|) = \sum_{k=0}^\infty \varphi(\|T(n)Sx\|) < \infty,$$

pentru orice $x \in X$. Aplicând acum Teorema 3.2.2 se obţine rezultatul căutat. $\square$

După cum am văzut şi mai sus, şi în unele din teoremele precedente, toate afirmaţiile referitoare la stabilitate cu măsura de numărare sunt echivalente cu cele referitoare la măsura lui Lebesgue, motiv pentru care precizăm următoarea observaţie.

Remarca 3.2.2. Fie $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semigrup şi $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, crescătoare, cu $\varphi(0) = 0$ şi $\varphi(t) > 0$ pentru orice $t > 0$. Atunci

$$\int_0^\infty \varphi(\|T(t)x\|)\mathrm{d}t < \infty$$

pentru orice $x \in X$ dacă şi numai dacă

$$\sum_{k=0}^\infty \varphi(\|T(n)x\|) < \infty$$

pentru orice $x \in X$.

Varianta Teoremei lui Rolevicz pentru instabilitate este prezentată în continuare.

Teorema 3.2.5. *Fie $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semigrup de operatori injectivi pentru care există $k > 0$ şi $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ crescătoare cu $\varphi(0) = 0$ şi $\varphi(t) > 0$ pentru orice $t > 0$, astfel încât*

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{\|T(\tau)x\|}\right)\mathrm{d}\tau \leq \frac{k}{\|x\|},$$

pentru orice $x \in X$, $x \neq 0$. Atunci $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial instabil.

Demonstraţie: Fie $x \neq 0$ şi $t \geq 0$. Deasemenea, notăm cu $S = \sup\limits_{s\in[0,1]} Me^{\omega s}$ cu M şi ω din proprietatea de creştere exponenţială. Atunci $\|T(\tau)x\| \leq S\|T(t)x\|$, $\forall \tau \in [t, t+1]$. Inversăm această relaţie, îi aplicăm funcţia φ care este crescătoare, şi integrăm de la t la $t+1$.

$$\varphi\left(\frac{1}{\|T(t)x\|}\right) \leq \int_t^{t+1} \varphi\left(\frac{S}{\|T(\tau)x\|}\right)\mathrm{d}\tau \leq \int_0^\infty \varphi\left(\frac{S}{\|T(\tau)x\|}\right)\mathrm{d}\tau \leq \frac{kS}{\|x\|}.$$

Fie acum $\tau \in [0, t]$ şi obţinem

$$\varphi\left(\frac{1}{\|T(t)x\|}\right) = \varphi\left(\frac{1}{\|T(t-\tau)T(\tau)x\|}\right) \leq \frac{kS}{\|T(\tau)x\|}.$$

Acestei inegalităţi îi aplicăm din nou funcţia crescătoare φ şi integrăm de la 0 la t.

$$t\varphi\left(\varphi\left(\frac{1}{\|T(t)x\|}\right)\right) \leq \int_0^t \varphi\left(\frac{kS}{\|T(\tau)x\|}\right) \mathrm{d}\tau \leq \int_0^\infty \varphi\left(\frac{kS}{\|T(\tau)x\|}\right) \mathrm{d}\tau \leq \frac{k^2 S}{\|x\|},$$

pentru orice $t \geq 0$ şi pentru orice $x \in X \setminus \{0\}$.

Mai departe considerăm un $x \in X$ cu $\|x\| = 1$. Conform celor de mai sus avem

$$\varphi\left(\varphi\left(\frac{1}{\|T(t)x\|}\right)\right) \leq \frac{k^2 S}{t},\ \forall t > 0.$$

Se vede foarte uşor că $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{k^2 S}{t} = 0$, de unde rezultă că există un $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $t > \delta$ avem $\dfrac{k^2 S}{t} < \varphi(\varphi(0.5))$. Deoarece $\varphi \circ \varphi$ este compunere de funcţii crescătoare, aceasta este deasemenea crescătoare, fapt ce implică inegalitatea $\dfrac{1}{\|T(t)x\|} \leq \dfrac{1}{2}$ pentru orice $x \in X$ cu $\|x\| = 1$ şi pentru orice $t > \delta$, fapt ce se traduce echivalent prin $\|T(t)x\| \geq 2$ pentru orice $x \in X$ cu $\|x\| = 1$ şi pentru orice $t > \delta$. Fie acum $y \in X$ nenul şi $x = \dfrac{y}{\|y\|}$. Atunci conform celor scrise mai sus obţinem $\|T(t)y\| \geq 2\|y\|$, pentru orice $t > \delta$ şi pentru orice $y \in X$. (am renunţat la condiţia $y \neq 0$ pentru că acest caz se verifică trivial ca fiind adevărat)

Astfel există $t_0 > \delta > 0$ cu $\|T(t_0)x\| \geq 2\|x\|$ pentru orice $x \in X$, ceea ce implică faptul că semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial instabil. $\square$

Varianta discretă a rezultatului de mai sus este prezentată în continuare.

Teorema 3.2.6. *Fie $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semigrup de operatori injectivi pentru care există $k > 0$ şi $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, crescătoare, cu $\varphi(0) = 0$ şi $\varphi(t) > 0$ pentru orice $t > 0$, astfel încât*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{\|T(n)x\|}\right) \leq \frac{k}{\|x\|},$$

pentru orice $x \in X$, $x \neq 0$. Atunci $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial instabil.

Demonstraţie: Fie $t \geq 0$ şi $n = \lfloor t \rfloor$. Atunci, notând cu $S = \sup\limits_{s\in[0,1]} Me^{\omega s}$, cu M, ω din proprietatea de creştere exponenţială, obţinem

$$\|T(n+1)x\| \leq S\|T(t)x\|,$$

de unde, prin inversare, rezultă că

$$\frac{1}{\|T(t)x\|} \leq \frac{S}{\|T(n+1)x\|}.$$

Aplicând funcţia crescătoare φ acestei inegalităţi şi integrând de la n la $n+1$ obţinem

$$\int_n^{n+1} \varphi\left(\frac{1}{\|T(t)x\|}\right) \mathrm{d}t \leq \varphi\left(\frac{S}{\|T(n+1)x\|}\right).$$

Prin însumare se obţine

$$\int_0^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{\|T(t)x\|}\right) \mathrm{d}t \leq \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{S}{\|T(n)x\|}\right) \leq \frac{kS}{\|x\|} < \infty.$$

Din Teorema precedentă rezultă că $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial instabil. □

3.3 Teoreme de stabilitate de tip Perron

În cele ce urmează vom nota

$$\mathcal{C} = \{f : \mathbb{R}_+ \to X : f \text{ continuă pe } \mathbb{R}_+ \text{ şi } f \text{ mărginită}\},$$

spaţiu dotat cu norma supremum $|||f||| = \sup\limits_{t\geq 0} \|f(t)\|$. Mai departe vom vedea ce înţelegem prin faptul că un $\mathcal{C}_0$-semigrup satisface condiţia Perron.

Definiţia 3.3.1. Spunem că $\mathcal{C}_0$-semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *satisface condiţia Perron* dacă oricare ar fi $f \in \mathcal{C}$, aplicaţia $x_f : \mathbb{R}_+ \to X$ definită prin $x_f(t) = \displaystyle\int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s$ satisface $x_f \in \mathcal{C}$.

Teorema 3.3.1. (Teorema Perron) *$\mathcal{C}_0$-semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil dacă şi numai dacă $\{T_t\}_{t\geq 0}$ satisface condiţia Perron.*

Demonstraţie: Necesiatea: Conform ipotezei, există $N, \nu > 0$ astfel încât $\|T(t)\| \leq Ne^{-\nu t}$, pentru orice $t \geq 0$. Fie $f \in \mathcal{C}$ şi $x_f(t) = \displaystyle\int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s$. Trecem la normă, ţi obţinem

$$\begin{aligned} \|x_f(t)\| &\leq \int_0^t \|T(t-s)f(s)\|\mathrm{d}s \leq \int_0^t Ne^{-\nu(t-s)}\|f(s)\|\mathrm{d}s \leq \\ &\leq N|||f||| \int_0^t e^{-\nu(t-s)}\mathrm{d}s = N|||f||| \int_0^t e^{-\nu\tau}\mathrm{d}\tau = \\ &= N|||f\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu}e^{-\nu t}\right) \leq \frac{N}{\nu}|||f|||, \end{aligned}$$

oricare ar fi $t \geq 0$. Astfel rezultă că $x_f \in \mathcal{C}$.

Suficienţa: Fie $\omega > \omega_0(T)$, $\omega \neq 0$, $x \in X$ şi $f : \mathbb{R}_+ \to X$, $f(t) = e^{-\omega t}T(t)x$. Atunci există M astfel încât $\|T(t)x\| \leq Me^{\omega t}\|x\|$, $\forall x \in X$, $\forall t \geq 0$. Prin urmare $\|f(t)\| = e^{-\omega t}\|T(t)x\| \leq M$, ceea ce ne arată că $f \in \mathcal{C}$ şi

$$x_f(t) = \int_0^t e^{-\omega t}T(t)x\mathrm{d}\tau = \frac{1 - e^{-\omega t}}{\omega}T(t)x.$$

Prin urmare $T(t)x = \omega x_f(t) + e^{-\omega t}T(t)x$, oricare ar fi $t \geq 0$. Cum $x_f \in \mathcal{C}$ obţinem că aplicaţia

$$t \mapsto T(t)x : \mathbb{R}_+ \to X$$

notată $T(\cdot)x$ aparţine lui $\mathcal{C}$, oricare ar fi $x \in X$.

Aplicând Princpiul Mărginirii Uniforme deducem că există $k > 0$ astfel încât $\|T(t)\| \leq k$, $\forall t \geq 0$. Considerăm acum $g : \mathbb{R}_+ \to X$, $g(t) = T(t)x$, atunci $g \in \mathcal{C}$ şi $x_g(t) = tT(t)x$, oriare ar fi $t \geq 0$. Cum $x_g \in \mathcal{C}$ rezultă că există un $L_x \geq 0$ astfel încât $t\|T(t)x\| \leq L_x$, oricare ar fi $t \geq 0$.

Tot din Principiul Mărginirii Uniforme rezultă că există $L > 0$ astfel încât

$$t\|T(t)\| \leq L, \ \forall t \geq 0.$$

Astfel se obţine

$$\|T(t)\| \leq \frac{L}{t}, \ \forall t > 0,$$

ceea ce ne arată că există un t_0 suficient de mare astfel încât $\|T(t_0)\| < 1$. Din Teorema 3.1.1 rezultă că $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil. □

O altă teoremă, care modifică spaţiile de intrare, respectiv ieşire, afectând astfel şi puterea rezultatului este următoarea.

Teorema 3.3.2. *$\mathcal{C}_0$-semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil dacă şi numai dacă pentru orice $f \in L^1(\mathbb{R}_+, X)$, aplicaţia x_f aparţine lui $L^\infty(\mathbb{R}_+, X)$.*

Demonstraţie: Necesitatea: Fie $f \in L^1(\mathbb{R}_+, X)$. Atunci

$$\|x_f(t)\| \leq \int_0^t \|T(t-\tau)\|\|f(\tau)\|\mathrm{d}\tau \leq N \int_0^\infty \|f(\tau)\|\mathrm{d}\tau = N\|f\|_1,$$

oricare ar fi $t \geq 0$. Trecând la supremum obţinem rezultatul dorit, şi anume $x_f \in L^\infty(\mathbb{R}_+, X)$.

Suficienţa: Fie $f(t) = \chi_{[0,1]}(t)T(t)x$[1], cu $x \in X$. Atunci $f \in L^1(\mathbb{R}_+, X)$ şi $x_f(t) = T(t)x$, oricare ar fi $t \geq 1$. Cum $x_f \in L^\infty(\mathbb{R}_+, X)$ pentru orice $x \in X$, din Principiul Mărginirii Uniforme rezultă că există $k > 0$ astfel încât $\|T(t)\| \leq k$, $\forall t \geq 1$.

[1] χ_A este funcţia caracteristică a mulţimii A

Notând acum cu $S = \sup_{s\in[0,1]} Me^{\omega s}$ cu M, ω din proprietatea de creştere exponenţială rezultă că

$$\|T(t)\| \leq \max\{S, k\},\ \forall t \geq 0,$$

ceea ce arată că $\mathcal{C}_0$-semigrupul este stabil. □

O altă condiţie de tip Perron este dată de definiţia următoare. Ideea de bază este că schimbarea spaţiilor de intrare-ieşire în L^p, respectiv L^q unde perechea (p, q) e diferită de perechea $(1, \infty)$ ne furnizează o nouă teoremă de stabilitate.

Definiţia 3.3.2. Spunem că $\mathcal{C}_0$-semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ satisface *condiţia Perron de tip (p,q)* dacă pentru orice $f \in L^p$ aplicaţia $x_f(t) = \displaystyle\int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s$ aparţine lui L^q.

Teorema 3.3.3. (Teorema de mărginire) *Dacă $\mathcal{C}_0$-semigrupul $\{T_t\}_{t\geq 0}$ satisface condiţia Perron de tip (p, q) atunci există $k > 0$ astfel încât*

$$\|x_f\|_q = \|\mathcal{U}(f)\|_q \leq k\|f\|_p,\ \forall f \in L^p.$$

Demonstraţie: Primul pas este să demonstrăm o proprietate de mărginire a operatorului $\mathcal{U} : L^p \to L^q$ definit prin $\mathcal{U}(f) = x_f$ pentru orice $f \in L^p$. Ipotezele teoremei ne asigură că $\mathcal{U}$ este corect definit. Pentru a demonstra mărginirea, vom folosi Principiul Graficului Închis.

Presupunem că $(f_n) \subset L^p$, $f_n \xrightarrow{L^p} f$ şi $\mathcal{U}f_n \xrightarrow{L^q} g \in L^q$. Vrem să demonstrăm că $\mathcal{U} = g$. Pentru a demonstra acest lucru calculăm mai întâi pentru un $t > 0$ fixat

$$\|x_f(t) - x_{f_n}(t)\| = \left\|\int_0^t T(t-\tau)(f(\tau) - f_n(\tau))\mathrm{d}\tau\right\| \leq \int_0^t \|T(t-\tau)\|\|f(\tau) - f_n(\tau)\|\mathrm{d}\tau.$$

Considerăm M, ω din proprietatea de creştere exponenţială şi folosim inegalitatea lui Hölder în felul următor

$$\int_0^t \|f(\tau) - f_n(\tau)\| \cdot 1\mathrm{d}\tau \leq \left(\int_0^t \|f(s) - f_n(s)\|^p\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^t 1\mathrm{d}s\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \|f_n - f\|_p t^{\frac{p-1}{p}}.$$

Combinând rezultatele de mai sus obţinem

$$\|x_f(t) - x_{f_n}(t)\| \leq Me^{\omega t}t^{\frac{p-1}{p}}\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ceea ce ne arată că x_{f_n} converge punctual la x_f.

Deoarece $\mathcal{U}(f_n)$ converge la g în L^q rezultă din Teorema lui Riesz (vezi [7], pag. 156, Teorema 11.26) că există un subşir al lui (f_n), de exemplu (f_{k_n}) astfel încât $\mathcal{U}(f_{k_n})$ converge la g a.p.t. Conform rezultatelor de mai sus $\mathcal{U}(f_{k_n})$ converge deasemenea la $x_f = \mathcal{U}(f)$, fapt ce ne conduce la $\mathcal{U}(f) = g$ a.p.t., ceea ce este echivalent cu $\mathcal{U}(f) = g$ în L^q.

Prin urmare operatorul $\mathcal{U}$ este închis şi din Teorema Graficului Închis, acesta este şi mărginit, ceea ce înseamnă că există un $k > 0$ astfel încât

$$\|x_f\|_q = \|\mathcal{U}(f)\|_q \leq k\|f\|_p, \ \forall f \in L^p.$$

□

Teorema 3.3.4. (Stabilitate Perron de tip (p,q)) *Dacă $\mathcal{C}_0$-semigrupul satisface condiţia Perron de tip $(p, q) \neq (1, \infty)$ atunci $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil.*

Demonstraţie: Păstrăm notaţiile din Teorema precedentă. Fie acum $t \geq 1$ şi $s \in [t-1, t]$. Avem

$$x_f(t) = T(t-s)\int_0^s T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_s^t T(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

şi prin trecere la normă

$$\|x_f(t)\| \leq Me^{\omega}\|x_f(s)\| + Me^{\omega}\int_{t-1}^t \|f(\tau)\|\mathrm{d}\tau,$$

cu M, ω din teorema de creştere exponenţială.

Aplicăm inegalitatea lui Hölder pe intervalul $[t-1, t]$ pentru $f \in L^p$ şi $1 \in L^{p'}$ în felul următor

$$\int_{t-1}^t \|f(\tau)\|\mathrm{d}\tau \leq \left(\int_{t-1}^t \|f\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p.$$

Astfel, continuând şirul de inegalităţi avem

$$\|x_f(t)\| \leq Me^{\omega}(\|x_f(s)\| + \|f\|_p), \ \forall s \in [t-1, t].$$

Integrând această inegalitate pe intervalul $[t-1, t]$ în raport cu s şi aplicând inegalitatea lui Hölder pentru $x_f \in L^q$ şi $1 \in L^{q'}$ obţinem

$$\|x_f(t)\| \leq Me^{\omega}\left(\int_{t-1}^t \|x_f(s)\|\mathrm{d}s + \|f\|_p\right) \leq Me^{\omega}(\|x_f\|_q + \|f\|_p).$$

Pentru $t \in [0, 1]$ avem

$$\|x_f(t)\| = \left\|\int_0^t T(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\| \leq Me^{\omega t}\int_0^1 \|f(\tau)\|\mathrm{d}\tau \leq Me^{\omega}\|f\|_p,$$

unde ultima inegalitate s-a obţinut aplicând inegalitatea lui Hölder pe intervalul $[0, 1]$ funcţiilor $f \in L^p$ şi $1 \in L^{p'}$.

Astfel, putem afirma că $\|x_f(t)\| \leq Me^{\omega}(\|x_f\|_q + \|f\|_p), \ \forall t \geq 0$. Folosind acum Teorema de mărginire, avem

$$\|x_f(t)\| \leq Me^{\omega}(k+1)\|f\|_p, \ \forall t \geq 0. \qquad (I)$$

Să luăm acum $f : \mathbb{R}_+ \to X,\ f(t) = \chi_{[0,1]}(t)T(t)x$, unde $x \in X$. Este evident că $f \in L^p$ şi $\|f\|_p \leq Me^{\omega}\|x\|$. Mai departe, observăm că

$$x_f(t) = \begin{cases} T(t)x, & t \geq 1 \\ tT(t)x, & t \in [0,1) \end{cases}.$$

Aplicând inegalitatea (I) obţinem că

$$\|x_f(t)\| = \|T(t)x\| \leq Me^{\omega}(k+1)\|f\|_p \leq M^2e^{2\omega}(k+1)\|x\|,\ \forall t \geq 1.$$

Pentru $t \leq 1$ avem inegalitatea evidentă $\|T(t)x\| \leq Me^{\omega}\|x\|$, prin urmare există $L = \max\{M^2e^{2\omega}(k+1), Me^{\omega}\}$ astfel încât $\|T(t)x\| \leq L\|x\|$. Cum $x \in X$ a fost ales arbitrar şi L nu depinde de x rezultă că ingalitatea $\|T(t)x\| \leq L\|x\|$ are loc pentru orice $x \in X$, adică semigrupul este stabil.

Fie acum $\delta > 0$, şi definim $g : \mathbb{R}_+ \to X,\ g(t) = \chi_{[0,\delta]}(t)T(t)x$, unde $x \in X$. Avem $\|g(t)\| \leq \|T(t)x\| \leq \chi_{[0,\delta]}L\|x\|$, ceea ce ne conduce la $\|g\|_p \leq \delta^{1/p}L\|x\|$.

Observăm, deasemenea că

$$x_g(t) = \begin{cases} \delta T(t)x, & t \geq \delta \\ tT(t)x, & t \in [0,\delta) \end{cases}.$$

Folosind inegalitatea (I) obţinem pentru $t \geq \delta$

$$\|x_g(t)\| = \delta\|T(t)x\| \leq Me^{\omega}(k+1)\|g\|_p \leq Me^{\omega}(k+1)\delta^{1/p}L\|x\|,$$

şi pentru $t = \delta$ avem

$$\|T(\delta)x\| \leq LMe^{\omega}(k+1)\delta^{\frac{1}{p}-1}\|x\|.$$

Având în vedere faptul că $LMe^{\omega}(k+1)$ nu depinde de x rezultă că avem

$$\|T(\delta)\| \leq LMe^{\omega}(k+1)\delta^{\frac{1}{p}-1},$$

pentru orice $\delta > 0$. În cazul în care $p > 1$ trecând la limită pentru $\delta \to \infty$ în inegalitatea precedentă obţinem că există un δ_0 pentru care $\|T(\delta_0)\| < 1$, şi conform Teoremei 3.1.1 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ este exponenţial stabil.

Să considerăm acum cazul $p = 1,\ q < \infty$.

Atunci $\dfrac{\delta^2}{2}\|T(\delta)s\| = \displaystyle\int_0^{\delta} s\|T(\delta)x\|\mathrm{d}s$. Folosind stabilitatea obţinem că pentru $t \geq s \geq$

0 are loc $\|T(t)x\| \leq L\|T(s)x\|$. Prin urmare pentru $\delta > 1$ avem

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2}{2}\|T(\delta)x\| &= \int_0^\delta s\|T(\delta)x\|\mathrm{d}s \leq \\
&\leq L\int_0^\delta s\|T(s)x\|\mathrm{d}s = L\int_0^\delta \|x_g(s)\|\mathrm{d}s \leq \\
\text{(Hölder)} &\leq L\|x_g\|_q \delta^{\frac{q-1}{q}} \leq \\
\text{(T. Mărginire)} &\leq L\delta^{\frac{q-1}{q}} Me^{\omega}(k+1)\|g\|_p \leq \\
&\leq L\delta^{\frac{q-1}{q}} Me^{\omega}(k+1)\delta^{\frac{1}{p}} L\|x\| \leq \\
&\leq L^2(k+1)\delta^{2-\frac{1}{q}}\|x\|.
\end{aligned}$$

Simplificăm cu δ^2 şi ţinând cont că L, k nu depind de x obţinem

$$\|T(\delta)\| \leq 2L^2(k+1)\delta^{-\frac{1}{q}}.$$

Deoarece $0 < q \neq \infty$, trecând la limită în inegalitatea de mai sus pentru $\delta \to \infty$ obţinem că există un $\delta_0 > 0$ pentru care $\|T(\delta_0)\| < 1$, care conform aceleiaşi Teoreme 3.1.1 implică stabilitatea exponenţială a lui $\{T_t\}_{t\geq 0}$.

Astfel teorema este complet demonstrată. $\square$

Concluzii

Lucrarea de faţă reprezintă doar o scurtă introducere în studiul $\mathcal{C}_0$-semigrupurilor şi al ecuaţiilor de evoluţie. Am putut vedea cum conceptul de $\mathcal{C}_0$-semigrup apare natural ca o generalizare a funcţiei exponenţiale pentru operatori mărginiţi, precum şi multele proprietăţi interesante pe care aceste obiecte matematice le au. Am văzut cum se pot studia anumite ecuaţii cu derivate parţiale cu ajutorul $\mathcal{C}_0$-semigrupurilor şi în ultimul capitol am prezentat două tipuri de teoreme pentru stabilitate şi instabilitate exponenţială, şi anume teoreme de tip Datko şi Perron.

Mai există şi alte tipuri de abordări ale problemelor de stabilitate, de exemplu teoremele lui Liapunov, precum şi continuarea naturală a studiului stabilităţii, şi anume conceptul de dichotomie pentru $\mathcal{C}_0$-semigrupuri. Deasemenea, semigrupurile sunt un caz particular al unei alte clase mai mari, şi anume procesele de evoluţie, care prezintă metode de studiu noi şi interesante.

Sperăm că lucrurile şi ideile prezentate au fost suficient de interesante ca să va păstreze atenţia până în acest punct şi să va motiveze să aprofundaţi acest domeniu frumos al matematicii.

Bibliografie

[1] N.U. Ahmed, *Semigroup Theory with Applications to Systems and Control*, Pittman Research, Notes Math., 1991

[2] W. Arent, C.J.K Batty, M. Hieber, F. Neubrander, *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2001

[3] H. Brezis, *Analiză funcţională. Teorie şi aplicaţii*, Editura Academiei Române, 2002

[4] C. Chicone, Y. Latushkin, *Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol 70, Providence, American Mathematical Society, 1999

[5] R. Curtain, H.J. Zwart, *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Control Systems Theory*, Springer-Verlag, New-York, 1995

[6] Klaus-Jochen Engel, Rainer Nagel, *One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer 2000

[7] E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, 1969

[8] E. Hille, R.S. Phillips, *Functional Analysis and Semigroups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol 31, Providence, R.I. 1957

[9] J. van Neerven, *The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators*, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1996

[10] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1983

[11] Petre Preda, Ciprian Preda *Teorie calitativă pentru ecuaţii de evoluţie*, Ed. Mirton 2009

[12] P. Preda, A. Pogan, C. Preda, *On the Perron Problem for the Exponential Dichotomy for $\mathcal{C}_0$-semigroups*, Acta Mathematicae Universitae Comenianae, vol LXXII, no.2, 2003, 207-212

[13] A.L. Sasu, B. Sasu, *Sisteme liniare cu control*, Ed. Politehnica Timişoara 2003

[14] Ioan I. Vrabie, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura MAXITROM, Bucureşti 1999

[15] Ioan I. Vrabie, *Semigrupuri de operatori liniari şi aplicaţii*, Ed. Universităţii "Alexandru Ioan Cuza", Iaşi 2001

[16] J.A. Walker, *Dynamical Systems and Evolution Equations, Theory and Applications*, Plenum Press 1980

[17] J. Zabczyk, *A note on* $\mathcal{C}_0$*-semigroups*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astr. Phys., 23(1975), 895-898